โมเดลสามระดับ (Three-Level Model)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- โมเดลว่าง
- การย้ายศูนย์กลาง
- ความชันสุ่ม
- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ
- โมเดลระยะยาว
- สัมประสิทธิ์การทำนาย

โมเดลว่าง

- ข้อมูลบางชนิดมีการซ้อนกันถึง 3 ระดับ เช่น นักเรียน ซ้อนในห้องเรียน ซ้อนในโรงเรียน, ข้อมูลวัดซ้ำ ซ้อนในแพทย์ ซ้อนในโรงพยาบาล, ตำบล ซ้อนในอำเภอ ซ้อนในจังหวัด
- หลักการเกือบทั้งหมดที่อยู่ในโมเดล 2 ระดับ สามารถแผ่ขยายมาโมเดล 3 ระดับได้ เพียงแค่การแปลความหมายค่าพารามิเตอร์จะยิ่งซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

โมเดลว่าง

- เริ่มต้นที่โมเดลว่าง (Null Model) ให้ Y_{ijk} เป็นตัวแปรตามของคนที่ *i* กลุ่มที่ *j* ฝูงที่ *k* ที่ไม่ถูกทำนายด้วยตัวแปรอิสระใดเลย จะสามารถแบ่งตัวแปรตามออกเป็น 3 ระดับดังนี้

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$	ระดับที่ 1
$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + r_{0jk}$	ระดับที่ 2
$\pi_{00k} = \gamma_{000} + u_{00k}$	ระดับที่ 3

- β_{0jk} = ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามในกลุ่มที่ *j* ที่อยู่ในฝูงที่ *k*
- e_{ijk} = ค่าเบี่ยงเบนของคะแนนของคนที่ *i* ออกจากกลุ่มที่ *j* ในฝูงที่ *k*
- π_{00k} = ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามทุกกลุ่มในฝูงที่ *k*
- r_{0jk} = ค่าเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ *j* ฝูงที่ *k* ออกจากค่าเฉลี่ยของทุกกลุ่มในฝูงที่ *k*
- γ_{000} = ค่าเฉลี่ยรวมตัวแปรตามของทุกฝูง
- u_{00k} = ค่าเบี่ยงเบนออกจากค่าเฉลี่ยรวมของฝูงที่ *k*

โมเดลว่าง

- จาก

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

$$Var(Y_{ijk}) = Var(u_{00k}) + Var(r_{0jk}) + Var(e_{ijk})$$

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma^2 + \tau_{000} + \varphi_{000}$$

- $\sigma^2 =$ ความแปรปรวนในระดับบุคคล (ระดับที่ 1)
- $\tau_{000} =$ ความแปรปรวนในระดับกลุ่ม (ระดับที่ 2)
- $\varphi_{000} =$ ความแปรปรวนในระดับฝูง (ระดับที่ 3)

โมเดลว่าง

- เมื่อสามารถแบ่งความแปรปรวนออกเป็น 3 ระดับแล้ว สามารถหาสหสัมพันธ์ระหว่างชั้น (Intraclass Correlation) ได้ เพื่อแสดงสัดส่วนความแปรปรวนในแต่ละชั้น ดังนี้

$$\rho_2 = \frac{\tau_{000}}{\sigma^2 + \tau_{000} + \varphi_{000}}$$

สัดส่วนความแปรปรวนที่อธิบายในระดับกลุ่ม (ระดับที่ 2)

$$\rho_3 = \frac{\varphi_{000}}{\sigma^2 + \tau_{000} + \varphi_{000}}$$

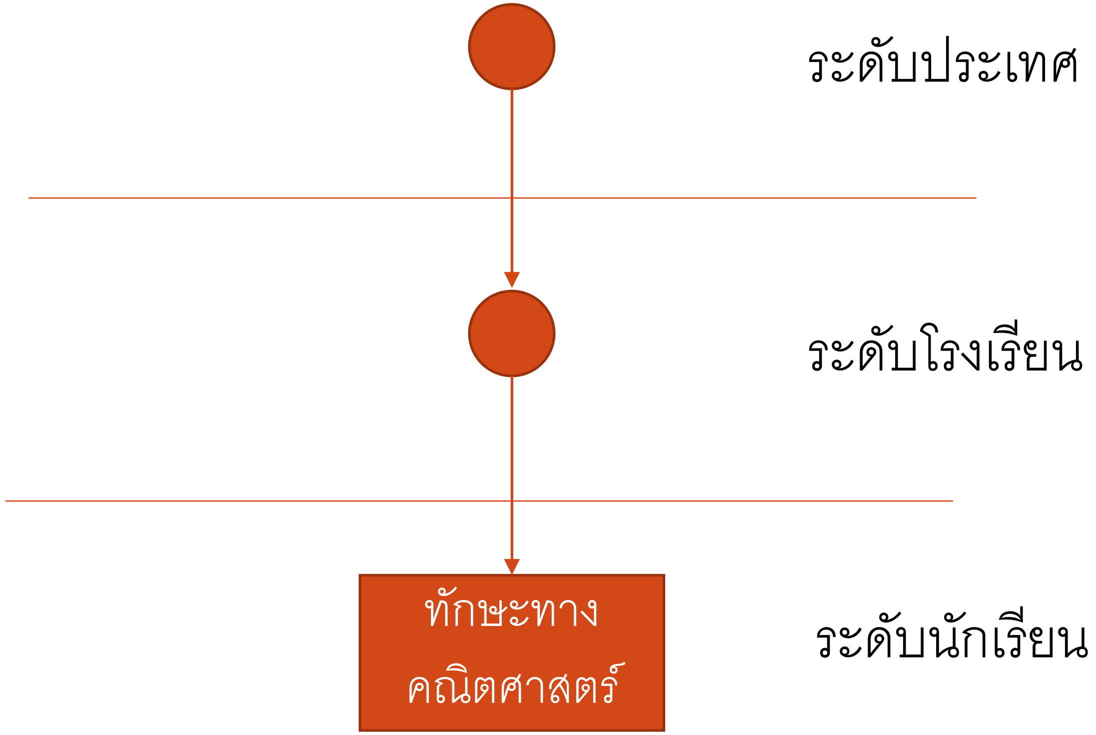
สัดส่วนความแปรปรวนที่อธิบายในระดับฝูง (ระดับที่ 3)

$$\rho_{23} = \frac{\tau_{000} + \varphi_{000}}{\sigma^2 + \tau_{000} + \varphi_{000}}$$

สัดส่วนความแปรปรวนที่อธิบายในระดับกลุ่มและฝูง (ระดับที่ 2 และ 3)

โมเดลว่าง

ประเมินความสามารถทางคณิตศาสตร์จากนักเรียนระดับ ม.1 ทั่วโลก จาก 93 ประเทศ มีโรงเรียน 4,787 แห่ง ซึ่งมีนักเรียนรวม 96,347 คน



โมเดลว่าง

ID ระดับประเทศ (ระดับที่ 3) ID ระดับโรงเรียน (ระดับที่ 2) ID ระดับนักเรียน (ระดับที่ 1)

```
> dat1 <- read.table("lecture10ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> psych::describe(dat1)
            vars     n     mean       sd   median trimmed      mad   min      max    range  skew kurtosis    se
countryid      1 96347    46.75    27.07    47.00    46.69    35.58  1.00    93.00    92.00  0.01    -1.21  0.09
schoolid       2 96347  2424.47  1391.43  2434.00  2430.31  1790.98  1.00  4787.00  4786.00 -0.03    -1.21  4.48
studentid      3 96347 48174.00 27813.13 48174.00 48174.00 35711.39  1.00 96347.00 96346.00  0.00    -1.20 89.60
math           4 96347    53.05    10.19    53.00    53.07    10.38 10.00    97.00    87.00 -0.01    -0.08  0.03
iq             5 96347    89.89    16.26    90.00    90.05    16.31 10.00   156.00   146.00 -0.11     0.02  0.05
private        6 96347     0.51     0.50     1.00     0.51     0.00  0.00     1.00     1.00 -0.05    -2.00  0.00
quality        7 96347    53.37    12.64    55.80    54.26    12.16 27.00    78.20    51.20 -0.56    -0.58  0.04
opportunity    8 96347    48.11     7.58    45.19    46.87     4.95 40.16    69.79    29.63  1.31     0.84  0.02
```

4. ทักษะทางคณิตศาสตร์ (ตัวแปรระดับนักเรียน)
5. เชาวน์ปัญญา (ตัวแปรระดับนักเรียน)
6. ประเภทโรงเรียน (1 = เอกชน, 0 = รัฐบาล) (ตัวแปรระดับโรงเรียน)
7. ดัชนีคุณภาพการศึกษา (ตัวแปรระดับประเทศ)
8. ดัชนีโอกาสทางการศึกษา (ตัวแปรระดับประเทศ)

```
> m10 <- lmer(math ~ 1 + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(m10)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 687159.2  687197.1 -343575.6  687151.2     96343

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3023 -0.6571 -0.0020  0.6547  4.3026

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.1541  6.2573
 countryid (Intercept)  0.3918  0.6259
 Residual              64.8436  8.0526
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  53.0481     0.1156   458.8
```

$$\sigma^2 = 64.84$$

$$\tau_{00} = 39.15$$

$$\varphi_{00} = 0.39$$

$$\rho_2 = \frac{64.84}{64.84 + 39.15 + 0.39} = .62$$

$$\rho_3 = \frac{0.39}{64.84 + 39.15 + 0.39} = .004$$

$$\rho_{23} = \frac{64.84 + 0.39}{64.84 + 39.15 + 0.39} = .62$$

```
> m11 <- lmer(iq ~ 1 + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m11)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: iq ~ 1 + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 712240.0  712277.9 -356116.0  712232.0     96343

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.6916 -0.6557  0.0020  0.6563  3.9177

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 99.51    9.975
 countryid (Intercept) 82.70    9.094
 Residual              81.16    9.009
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)   89.640      0.955   93.87
```

$\sigma^2 = 81.16$

$\tau_{00} = 99.51$

$\varphi_{00} = 82.70$

$$\rho_2 = \frac{99.51}{81.16 + 99.51 + 82.70} = .38$$

$$\rho_3 = \frac{82.70}{81.16 + 99.51 + 82.70} = .31$$

$$\rho_{23} = \frac{99.51 + 82.70}{81.16 + 99.51 + 82.70} = .69$$

การย้ายศูนย์กลาง

- ให้ X_{ijk} เป็นตัวแปรอิสระในระดับที่ 1 โดยอิทธิพลของตัวแปรอิสระดังกล่าวยังไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่มหรือฝูง จะได้โมเดลดังนี้

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}X_{ijk} + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

จาก $$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}} Y_{ijk}}{n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk})}{n_{jk}}$$ หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$\bar{Y}_{.jk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}\bar{X}_{.jk} + u_{00k} + r_{0jk}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} \bar{Y}_{.jk}}{n_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_k}(\gamma_{000} + \gamma_{100}\bar{X}_{.jk} + u_{00k} + r_{0jk})}{n_k}$$ หาค่าเฉลี่ยฝูง

$$\bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{000} + \gamma_{100}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$

ดังนั้น $$\bar{Y}_{.jk} - \bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{100}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + r_{0jk}$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} = \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

การย้ายศูนย์กลาง

- ดังนั้น หากใส่ตัวแปรอิสระที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ในระดับที่ 1 จะเป็นการเหมารวมว่าอิทธิพลของตัวแปรอิสระทั้งสามระดับเท่ากัน คือ γ_{100}
- การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม เหมือนการแบ่งตัวแปรอิสระออกเป็นอิทธิพลในแต่ละระดับ คือ อิทธิพลระดับฝูง อิทธิพลระดับกลุ่ม และอิทธิพลระดับบุคคล ตามลำดับ

$$X_{ijk} = \bar{\bar{X}}_{..k} + (\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + (X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})$$

การย้ายศูนย์กลาง

- หากย้ายศูนย์กลางของ X_{ijk} ไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม จะได้โมเดลดังนี้

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}\right) + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}\right) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

จาก $Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}} Y_{ijk}}{n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk})}{n_{jk}}$$ หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$\bar{Y}_{.jk} = \gamma_{000} + u_{00k} + r_{0jk}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} \bar{Y}_{.jk}}{n_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_k}(\gamma_{000} + u_{00k} + r_{0jk})}{n_k}$$ หาค่าเฉลี่ยฝูง

$$\bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{000} + u_{00k}$$

ดังนั้น

$$\bar{Y}_{.jk} - \bar{\bar{Y}}_{..k} = r_{0jk}$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} = \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

การย้ายศูนย์กลาง

- ดังนั้น หากย้ายศูนย์กลางของตัวแปรอิสระไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม จะเป็นการหาอิทธิพลระดับบุคคลเพียงอย่างเดียว ไม่ได้สร้างโมเดลอิทธิพลในระดับกลุ่ม และระดับฝูง

การย้ายศูนย์กลาง

- เพื่อหาอิทธิพลของตัวแปรอิสระในระดับที่กลุ่มและฝูง สามารถใส่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระในรูปแบบต่างๆ ได้ดังนี้

	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	-	-
A2	X_{ijk}	-	-
B1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$
B2	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$
B3	X_{ijk}	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$

การย้ายศูนย์กลาง

- โมเดล B1

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}\right) + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}\left(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}\right) + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010}$$

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}\right) + \gamma_{010}\left(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}\right) + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

จาก $$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}} Y_{ijk}}{n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk})}{n_{jk}}$$

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$\bar{Y}_{.jk} = \gamma_{000} + \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} \bar{Y}_{.jk}}{n_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_k}(\gamma_{000} + \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk})}{n_k}$$

หาค่าเฉลี่ยฝูง

$$\bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$

γ_{001} = อิทธิพลระดับฝูง

ดังนั้น $$\bar{Y}_{.jk} - \bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + r_{0jk}$$

γ_{010} = อิทธิพลระดับกลุ่ม

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} = \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

γ_{100} = อิทธิพลระดับบุคคล

การย้ายศูนย์กลาง

- โมเดล B2

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}\bar{X}_{.jk} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010}$$

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

จาก $Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}} Y_{ijk}}{n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk})}{n_{jk}}$$

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$\bar{Y}_{.jk} = \gamma_{000} + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} \bar{Y}_{.jk}}{n_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_k}(\gamma_{000} + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk})}{n_k}$$

หาค่าเฉลี่ยฝูง

$$\bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{000} + (\gamma_{010} + \gamma_{001})\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$

$\gamma_{010} + \gamma_{001}$ = อิทธิพลระดับฝูง

γ_{001} = ความแตกต่างระหว่างอิทธิพลระดับฝูงและระดับกลุ่ม

ดังนั้น $\bar{Y}_{.jk} - \bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + r_{0jk}$

γ_{010} = อิทธิพลระดับกลุ่ม

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} = \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

γ_{100} = อิทธิพลระดับบุคคล

การย้ายศูนย์กลาง

- โมเดล B3

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}X_{ijk} + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}\bar{X}_{.jk} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010}$$

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$ สมการรวม

จาก $$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}} Y_{ijk}}{n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\gamma_{000} + \gamma_{100}X_{ijk} + \gamma_{010}\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk})}{n_{jk}}$$

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$\bar{Y}_{.jk} = \gamma_{000} + (\gamma_{100} + \gamma_{010})\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} \bar{Y}_{.jk}}{n_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_k}(\gamma_{000} + (\gamma_{100} + \gamma_{010})\bar{X}_{.jk} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k} + r_{0jk})}{n_k}$$

หาค่าเฉลี่ยฝูง

$$\bar{\bar{Y}}_{..k} = \gamma_{000} + (\gamma_{100} + \gamma_{010} + \gamma_{001})\bar{\bar{X}}_{..k} + u_{00k}$$

$\gamma_{100} + \gamma_{010} + \gamma_{001}$ = อิทธิพลระดับฝูง

γ_{001} = ความแตกต่างระหว่างอิทธิพลฝูงและระดับกลุ่ม

ดังนั้น $$\bar{Y}_{.jk} - \bar{\bar{Y}}_{..k} = (\gamma_{100} + \gamma_{010})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + r_{0jk}$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} = \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

$\gamma_{100} + \gamma_{010}$ = อิทธิพลระดับกลุ่ม

γ_{010} = ความแตกต่างระหว่างอิทธิพลกลุ่มและระดับบุคคล

γ_{100} = อิทธิพลระดับบุคคล

	ตัวแปร			อิทธิพล		
	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	-	-	γ_{100}	-	-
A2	X_{ijk}	-	-	γ_{100}	γ_{100}	γ_{100}
B1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	γ_{100}	γ_{010}	γ_{001}
B2	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	γ_{100}	γ_{010}	$\gamma_{010} + \gamma_{001}$
B3	X_{ijk}	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	γ_{100}	$\gamma_{100} + \gamma_{010}$	$\gamma_{100} + \gamma_{010} + \gamma_{001}$

	γ_{100}	γ_{010}	γ_{001}
B1	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 1	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 2	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 3
B2	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 1	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 2	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 3 ลบระดับที่ 2
B3	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 1	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 2 ลบระดับที่ 1	อิทธิพลของ X ในระดับที่ 3 ลบระดับที่ 2

การย้ายศูนย์กลาง

- สำหรับตัวแปรอิสระในระดับที่ 2 ก็สามารถย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยฝูงได้เช่นเดียวกัน และสามารถใส่ค่าเฉลี่ยลงในระดับที่ 3 ได้เช่นกัน

	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	–	$W_{jk} - \bar{W}_{.k}$	-
A2	–	W_{jk}	-
B1	–	$W_{jk} - \bar{W}_{.k}$	$\bar{W}_{.k}$
B2	–	W_{jk}	$\bar{W}_{.k}$

เช่น โมเดล B2

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k} W_{jk} + r_{0jk}$$ ระดับที่ 2

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001} \bar{W}_{jk} + u_{00k}$$ ระดับที่ 3

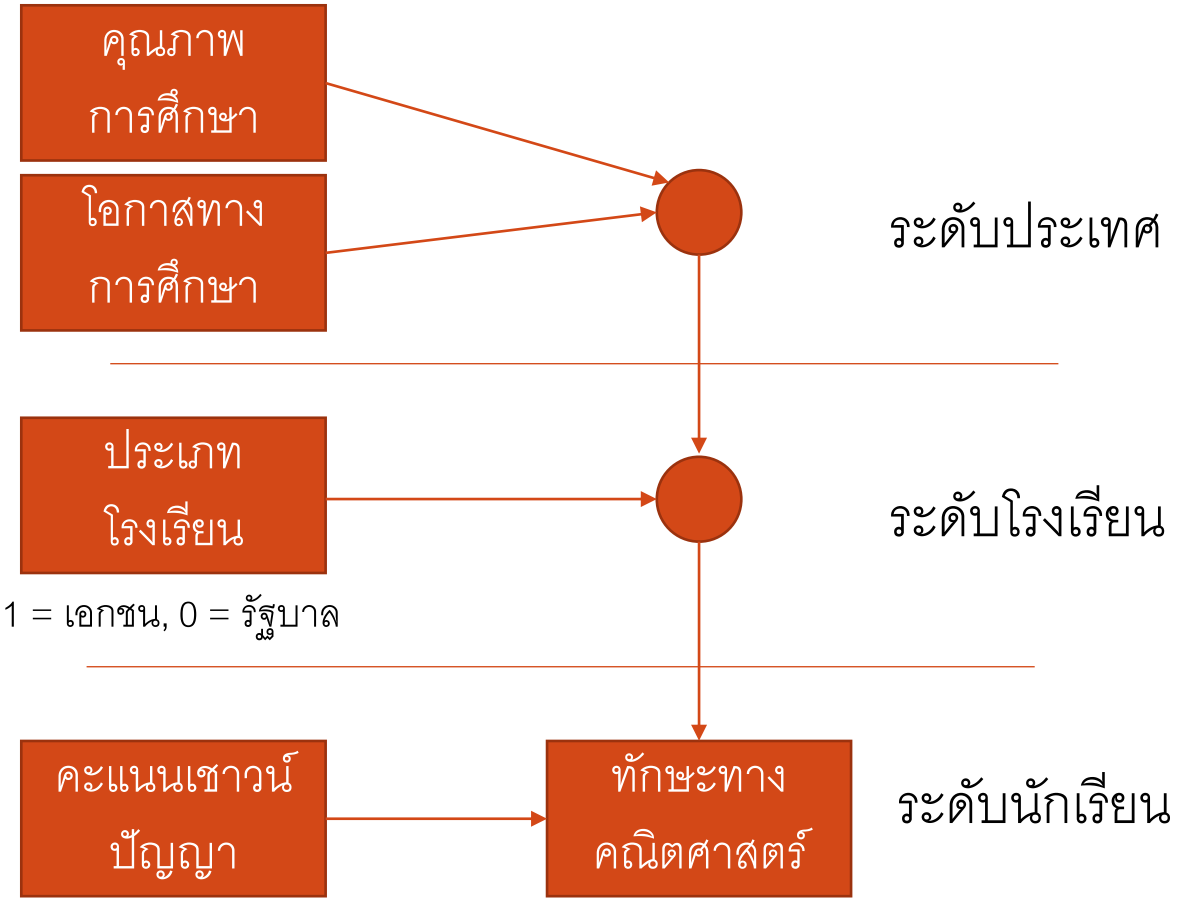
$$\pi_{01k} = \gamma_{010}$$

	ตัวแปร			อิทธิพล		
	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	-	$W_{jk} - \overline{W}_{.k}$	-	-	γ_{010}	-
A2	-	W_{jk}	-	-	γ_{010}	γ_{010}
B1	-	$W_{jk} - \overline{W}_{.k}$	$\overline{W}_{.k}$	-	γ_{010}	γ_{001}
B2	-	W_{jk}	$\overline{W}_{.k}$	-	γ_{010}	$\gamma_{010} + \gamma_{001}$

	γ_{010}	γ_{001}
B1	อิทธิพลของ *W* ในระดับที่ 2	อิทธิพลของ *W* ในระดับที่ 3
B2	อิทธิพลของ *W* ในระดับที่ 2	อิทธิพลของ *W* ในระดับที่ 3 ลบระดับที่ 2

การย้ายศูนย์กลาง

ประเมินความสามารถทางคณิตศาสตร์จากนักเรียนระดับ ม.1 ทั่วโลก จาก 93 ประเทศ มีโรงเรียน 4,787 แห่ง ซึ่งมีนักเรียนรวม 96,347 คน



การย้ายศูนย์กลาง

เปลี่ยนสเกลของ IQ ให้อยู่ในรูปแบบคะแนนมาตรฐาน เพราะสเกลเดิมทำให้ Convergent ยาก

```
> dat1$iqc <- (dat1$iq - 100)/15
>
> dat1$aveschooliqc <- ave(dat1$iqc, dat1$schoolid)
> dat1$diffschooliqc <- dat1$iqc - dat1$aveschooliqc
>
> dat1school <- dat1[!duplicated(dat1$schoolid),]
>
> dat1school$avecountryiqc <- ave(dat1school$aveschooliqc, dat1school$countryid)
> dat1school$diffcountryiqc <- dat1school$aveschooliqc - dat1school$avecountryiqc
>
> dat1school$aveprivate <- ave(dat1school$private, dat1school$countryid)
> dat1school$diffprivate <- dat1school$private - dat1school$aveprivate
>
> matchit <- match(dat1$schoolid, dat1school$schoolid)
>
> dat1$avecountryiqc <- dat1school[matchit, "avecountryiqc"]
> dat1$diffcountryiqc <- dat1school[matchit, "diffcountryiqc"]
>
> dat1$aveprivate <- dat1school[matchit, "aveprivate"]
> dat1$diffprivate <- dat1school[matchit, "diffprivate"]
```

ย้ายศูนย์กลางตัวแปรระดับนักเรียน ไปที่ค่าเฉลี่ยโรงเรียน

ทำข้อมูลที่แถวแสดงถึงระดับที่ 2

ย้ายศูนย์กลางตัวแปร ระดับโรงเรียน ไปที่ค่าเฉลี่ย ระดับประเทศ

จับคู่ข้อมูลระดับนักเรียน กับข้อมูลระดับโรงเรียน

เอาตัวแปรระดับที่ 2 ที่ย้ายศูนย์กลางแล้ว จากข้อมูลระดับโรงเรียน ไปข้อมูลระดับนักเรียน

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางระดับนักเรียน

โมเดล A1

```
> m1xa1 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc
+               + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1xa1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 686606.8  686654.2 -343298.4  686596.8     96342

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3126 -0.6554 -0.0010  0.6537  4.2581

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.1797  6.2594
 countryid (Intercept)  0.3918  0.6259
 Residual              64.4522  8.0282
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)   53.04809    0.11562  458.80
diffschooliqc  1.04171    0.04418   23.58
```

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์จากนักเรียนทุกคน โรงเรียนทุกโรงเรียน ในทุกประเทศเท่ากับ 53.04 คะแนน

หากคะแนนเชาวน์ปัญญาของนักเรียนในโรงเรียนเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบเพิ่มขึ้น 1.04 คะแนน

```
> m1xa2 <- lmer(math ~ 1 + iqc
+              + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+            control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1xa2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + iqc + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 686654.0  686701.4 -343322.0  686644.0     96342

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3186 -0.6556 -0.0011  0.6537  4.2594

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.3368  6.2719
 countryid (Intercept)  0.7775  0.8818
 Residual              64.4556  8.0284
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 53.67777    0.13561  395.83
iqc          0.93657    0.04139   22.63
```

ใส่ตัวแปรที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลาง

โมเดล A2

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์ที่คาดหวัง เมื่อคะแนนเชาวน์ปัญญาเท่ากับ 100 คะแนน เท่ากับ 53.68 คะแนน

หากคะแนนเชาวน์ปัญญาของนักเรียนเพิ่มขึ้น 15 คะแนน หรือค่าเฉลี่ยเชาวน์ปัญญาระดับโรงเรียนเพิ่มขึ้น 15 คะแนน หรือค่าเฉลี่ยเชาวน์ปัญญาระดับประเทศเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 0.937 คะแนน

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางนักเรียน

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางระดับโรงเรียน

โมเดล B1

```
> m1xb1 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + avecountryiqc
+               + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+               control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1xb1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + avecountryiqc + (1 |
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 686605.8  686672.1 -343295.9  686591.8     96340

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3125 -0.6553 -0.0010  0.6537  4.2579

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.1370  6.2560
 countryid (Intercept)  0.3898  0.6243
 Residual              64.4520  8.0282
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
               Estimate Std. Error t value
(Intercept)    52.97429    0.17251 307.075
diffschooliqc   1.04171    0.04418  23.581
diffcountryiqc  0.30603    0.14078   2.174
avecountryiqc  -0.10970    0.19023  -0.577
```

ค่าเฉลี่ยระดับประเทศ

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์เมื่อค่าเฉลี่ยเชาวน์ปัญญาระดับประเทศเท่ากับ 100 คะแนน เท่ากับ 52.97 คะแนน

หากคะแนนเชาวน์ปัญญาของนักเรียนในโรงเรียนเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 1.04 คะแนน

หากค่าเฉลี่ยคะแนนเชาวน์ปัญญาระดับโรงเรียนในประเทศเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 0.31 คะแนน

หากค่าเฉลี่ยคะแนนเชาวน์ปัญญาระดับประเทศเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์ลดลง 0.11 คะแนนแต่ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางนักเรียน

ค่าเฉลี่ยระดับโรงเรียน

โมเดล B2

```
> m1xb2 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + aveschooliqc + avecountryiqc
+              + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1xb2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + aveschooliqc + avecountryiqc + (1 |
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 686605.8  686672.1 -343295.9  686591.8     96340

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3125 -0.6553 -0.0010  0.6537  4.2579

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.1370  6.2560
 countryid (Intercept)  0.3898  0.6243
 Residual              64.4520  8.0282
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)   52.97429    0.17251 307.075
diffschooliqc  1.04171    0.04418  23.581
aveschooliqc   0.30603    0.14078   2.174
avecountryiqc -0.41573    0.23685  -1.755
```

ค่าเฉลี่ยระดับประเทศ

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์เมื่อประเทศและโรงเรียนมีคะแนนเชาวน์ปัญญาเท่ากับ 100 คะแนน เท่ากับ 52.97 คะแนน

หากคะแนนเชาวน์ปัญญาของนักเรียนในโรงเรียนเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 1.04 คะแนน

หากค่าเฉลี่ยคะแนนเชาวน์ปัญญาระดับโรงเรียนในประเทศเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 0.31 คะแนน

อิทธิพลของเชาวน์ปัญญาต่อผลสอบคณิตศาสตร์ในระดับประเทศต่ำกว่าอิทธิพลในระดับโรงเรียน 0.41 คะแนน ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ใส่ตัวแปรระดับนักเรียน

ค่าเฉลี่ยระดับโรงเรียน

โมเดล B3

```
> m1xb3 <- lmer(math ~ 1 + iqc + aveschooliqc + avecountryiqc
+              + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1xb3)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + iqc + aveschooliqc + avecountryiqc + (1 | schoolid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 686605.8  686672.1 -343295.9  686591.8     96340

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.3125 -0.6553 -0.0010  0.6537  4.2579

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 39.1370  6.2560
 countryid (Intercept)  0.3898  0.6243
 Residual              64.4520  8.0282
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)   52.97429    0.17251 307.075
iqc            1.04171    0.04418  23.581
aveschooliqc  -0.73568    0.14755  -4.986
avecountryiqc -0.41573    0.23685  -1.755
```

ค่าเฉลี่ยระดับประเทศ

คะแนนผลสอบคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่มีคะแนนเชาวน์ปัญญา 100 คะแนน ในโรงเรียนที่เฉลี่ย 100 คะแนน และประเทศที่เฉลี่ย 100 คะแนน จะเท่ากับ 52.97 คะแนน

หากคะแนนเชาวน์ปัญญาของนักเรียนในโรงเรียนเดียวกันเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลสอบคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น 1.04 คะแนน

อิทธิพลเชาวน์ปัญญาต่อผลสอบคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน น้อยกว่าอิทธิพลระดับนักเรียน 0.74 คะแนน ซึ่งแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

อิทธิพลของเชาวน์ปัญญาต่อผลสอบคณิตศาสตร์ในระดับประเทศ ต่ำกว่าอิทธิพลในระดับโรงเรียน 0.41 คะแนน ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

	ตัวแปร			อิทธิพล		
	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	-	-	1.042	-	-
A2	X_{ijk}	-	-	0.937	0.937	0.937
B1	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	1.042	0.306	-0.110
B2	$X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}$	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	1.042	0.306	0.306 - 0.416 = -0.110
B3	X_{ijk}	$\bar{X}_{.jk}$	$\bar{\bar{X}}_{..k}$	1.042	1.042 - 0.736 = 0.306	1.042 - 0.736 - 0.416 = -0.110

- ยกเว้นโมเดล A2 ที่สร้างเงื่อนไขว่าอิทธิพลทั้ง 3 ระดับเท่ากัน โมเดลอื่นประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาเท่ากัน
- การเลือกโมเดล ว่าจะใช้ A1, B1, B2, หรือ B3 ขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ผู้วิเคราะห์ต้องการจะทดสอบ

โมเดล A1

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางระดับโรงเรียน

```
> m1wa1 <- lmer(math ~ 1 + diffprivate
+               + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+               control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1wa1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffprivate + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 683548.4  683595.8 -341769.2  683538.4     96342

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2685 -0.6573 -0.0024  0.6568  4.2666

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 15.895   3.9868
 countryid (Intercept)  0.836   0.9143
 Residual              64.847   8.0528
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  53.0230     0.1152  460.42
diffprivate   9.6575     0.1307   73.87
```

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์จากนักเรียนทุกคน โรงเรียนทุกโรงเรียน ในทุกประเทศเท่ากับ 53.02 คะแนน

ในประเทศเดียวกัน โรงเรียนเอกชนมีผลสอบมากกว่าโรงเรียนรัฐบาล 9.66 คะแนน

โมเดล A2

ใส่ตัวแปรระดับโรงเรียน

```
> m1wa2 <- lmer(math ~ 1 + private
+             + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1wa2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + private + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
683514.3 683561.7 -341752.2 683504.3    96342

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2663 -0.6575 -0.0015  0.6565  4.2681

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 15.8884  3.9860
 countryid (Intercept)  0.4717  0.6868
 Residual              64.8470  8.0528
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  48.1443     0.1169  411.67
private       9.6409     0.1300   74.15
```

ค่าเฉลี่ยของผลสอบคณิตศาสตร์ของโรงเรียนรัฐบาลเท่ากับ 48.14 คะแนน

ในประเทศเดียวกัน โรงเรียนเอกชนมีผลสอบมากกว่าโรงเรียนรัฐบาล 9.64 คะแนน

ประเทศที่มีสัดส่วนโรงเรียนเอกชน 100% จะมีคะแนนสอบคณิตศาสตร์มากกว่าประเทศที่มีสัดส่วนโรงเรียนเอกชน 0% อยู่ 9.64 คะแนน

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางระดับโรงเรียน

ค่าเฉลี่ยระดับประเทศ

โมเดล B1

```
> m1wb1 <- lmer(math ~ 1 + diffprivate + aveprivate
+                + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+                control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1wb1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffprivate + aveprivate + (1 | schoolid) + (1 | cc
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 683514.7  683571.6 -341751.4  683502.7     96341

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2663 -0.6578 -0.0015  0.6567  4.2683

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 15.8884  3.9860
 countryid (Intercept)  0.4561  0.6753
 Residual              64.8471  8.0528
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  48.9286     0.6335  77.230
diffprivate   9.6579     0.1307  73.883
aveprivate    8.0930     1.2364   6.546
```

ค่าเฉลี่ยผลสอบคณิตศาสตร์ ของประเทศที่มีโรงเรียนรัฐบาลทั้งหมด

เท่ากับ 48.93 คะแนน

ในประเทศเดียวกัน โรงเรียนเอกชนมีผลสอบมากกว่าโรงเรียนรัฐบาล

9.66 คะแนน

ประเทศที่มีสัดส่วนโรงเรียนเอกชน 100% จะมีคะแนนสอบคณิตศาสตร์มากกว่าประเทศที่มีสัดส่วน

โรงเรียนเอกชน 0% อยู่ 8.09 คะแนน

โมเดล B2

ตัวแปรระดับโรงเรียน

ค่าเฉลี่ยระดับประเทศ

```
> m1wb2 <- lmer(math ~ 1 + private + aveprivate
+              + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m1wb2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + private + aveprivate + (1 | schoolid) + (1 | countr
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 683514.7  683571.6 -341751.4  683502.7     96341

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2663 -0.6578 -0.0015  0.6567  4.2683

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 15.8884  3.9860
 countryid (Intercept)  0.4561  0.6753
 Residual              64.8471  8.0528
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  48.9286     0.6335  77.230
private       9.6579     0.1307  73.883
aveprivate   -1.5648     1.2432  -1.259
```

ค่าเฉลี่ยผลสอบคณิตศาสตร์ ของประเทศที่มีโรงเรียนรัฐบาลทั้งหมด เท่ากับ 48.93 คะแนน

ในประเทศเดียวกัน โรงเรียนเอกชนมีผลสอบมากกว่าโรงเรียนรัฐบาล 9.66 คะแนน

อิทธิพลของประเภทโรงเรียนที่มีต่อผลสอบคณิตศาสตร์ระดับประเทศ น้อยกว่าอิทธิพลระดับโรงเรียน อยู่ -1.56 คะแนน

	ตัวแปร			อิทธิพล		
	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
A1	-	$W_{jk} - \bar{W}_{.k}$	-	-	9.656	-
A2	-	W_{jk}	-	-	9.641	9.641
B1	-	$W_{jk} - \bar{W}_{.k}$	$\bar{W}_{.k}$	-	9.656	8.093
B2	-	W_{jk}	$\bar{W}_{.k}$	-	9.656	9.656 – 1.565 = 8.091

- เนื่องจากในโมเดล B2 อิทธิพลของค่าเฉลี่ยระดับประเทศไม่ถึงระดับนัยสำคัญ อาจจะเหมารวมได้ว่า อิทธิพลระดับโรงเรียนและอิทธิพลระดับประเทศเท่ากัน
- ดังนั้น จะใช้โมเดล A1, A2, B1, B2 ก็สามารถใช้ได้หมด โดยโมเดล A2 จะเป็นโมเดลที่ประหยัด (Parsimonious) ที่สุด เนื่องจากประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าโมเดลอื่น

การประมาณค่าอิทธิพลของเชาวน์ปัญญา ประเภทโรงเรียน คุณภาพการศึกษา และโอกาสทางการศึกษา ต่อผลสอบคณิตศาสตร์ โดยใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ย

ย้ายศูนย์กลางของตัวแปรระดับประเทศ ไปที่ค่าเฉลี่ยรวม

```
> dat1country <- dat1[!duplicated(dat1$countryid),]
> apply(dat1country, 2, mean)
      countryid        schoolid       studentid            math              iq         private 
     47.0000000    2412.3763441   47916.0000000      48.9354839      88.6129032       0.0000000 
        quality     opportunity             iqc    aveschooliqc   diffschooliqc  avecountryiqc 
     53.3268817      47.9759140      -0.7591398      -0.7138807      -0.0452591      -0.6911782 
diffcountryiqc     aveprivate     diffprivate 
     -0.0227025       0.5058572      -0.5058572 
```

ย้ายศูนย์กลางตัวแปรระดับประเทศ ไปที่ค่าเฉลี่ยรวม

```
> m12 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m12)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc +
    0.691) + diffprivate + I(aveprivate - 0.506) + I(quality -
    53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 682935.3  683039.5 -341456.7  682913.3     96336

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2348 -0.6588 -0.0024  0.6569  4.2182

Random effects:
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 schoolid  (Intercept) 15.8440  3.9804
 countryid (Intercept)  0.3116  0.5582
 Residual              64.4547  8.0284
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93

Fixed effects:
                         Estimate Std. Error t value
(Intercept)             53.026113   0.087048 609.157
diffschooliqc            1.041705   0.044177  23.580   sig
diffcountryiqc           0.405794   0.095543   4.247   sig
I(avecountryiqc + 0.691) -0.514889  0.218560  -2.356   sig
diffprivate              9.665964   0.130507  74.065   sig
I(aveprivate - 0.506)    7.904676   1.142031   6.922   sig
I(quality - 53.33)       0.007607   0.014989   0.508   not sig
I(opportunity - 47.98)   0.056968   0.021359   2.667   sig
```

สามารถนำไปหา ICC ของค่าคงเหลือได้

การแปลความหมาย ยกไปในบทความชันสุ่ม
เนื่องจากการแปลความหมายใกล้เคียงกัน

ความชันสุ่ม

- ให้ X_{ijk} เป็นตัวแปรอิสระระดับที่ 1, W_{jk} เป็นตัวแปรอิสระระดับที่ 2, และ V_k เป็นตัวแปรอิสระระดับที่ 3 โมเดลที่ไม่มีความชันสุ่มจะเป็นดังนี้ (เพื่อความง่ายในการแสดงโมเดล เลยแสดงสมการที่ไม่ย้ายศูนย์กลาง)

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}X_{ijk} + e_{ijk}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}W_{jk} + r_{0jk}$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

ระดับที่ 2

$$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}V_k + u_{00k}$$

$$\pi_{10k} = \gamma_{100}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010}$$

ระดับที่ 3

ความชันสุ่ม

- ให้ X_{ijk} มีความชันสุ่มในระดับที่ 2 และ 3 และ W_{jk} มีความชันสุ่มในระดับที่ 3 โมเดลจะเป็นดังนี้

ระดับที่ 1 $$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}X_{ijk} + e_{ijk} \qquad Var(e_{ijk}) = \sigma^2$$

ระดับที่ 2 $$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}W_{jk} + r_{0jk}$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k} + r_{1jk}$$

$$Var\left(\begin{bmatrix} r_{0jk} \\ r_{1jk} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{bmatrix}$$

ระดับที่ 3 $$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}V_k + u_{00k}$$

$$\pi_{10k} = \gamma_{100} + u_{10k}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010} + u_{01k}$$

$$Var\left(\begin{bmatrix} u_{00k} \\ u_{10k} \\ u_{01k} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{00,00} & & \\ \varphi_{10,00} & \varphi_{10,10} & \\ \varphi_{01,00} & \varphi_{10,01} & \varphi_{01,01} \end{bmatrix}$$

สมการรวม

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} = {} & \gamma_{000} + \color{red}{\gamma_{001}} V_k \\
& + \color{blue}{(\gamma_{010} + u_{01k})} W_{jk} \\
& + \color{green}{(\gamma_{100} + u_{10k} + r_{1jk})} X_{ijk} \\
& + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}
\end{aligned}
$$

- V_k จะไม่มีอิทธิพลสุ่ม เพราะเป็นตัวแปรอิสระระดับที่ 3
- W_{jk} จะประกอบด้วยค่าเฉลี่ย (γ_{010}) และอิทธิพลสุ่มที่ทำให้ค่าความชันแต่ละหน่วยของระดับที่ 3 แตกต่างกัน (u_{01k}) เช่น เพราะอยู่ประเทศ *k* ทำให้โรงเรียนเอกชนมีคะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ยสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาลมากเป็นพิเศษ
- X_{ijk} จะประกอบด้วยค่าเฉลี่ย (γ_{100}) และอิทธิพลสุ่มจากอยู่หน่วยระดับที่ 3 (u_{01k}) และอิทธิพลสุ่มจากการหน่วยในหน่วยระดับที่ 2 ที่เบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยหน่วยระดับที่ 3 (r_{1jk}) เช่น ในประเทศ *k* ผลของเชาวน์ปัญญาส่งผลต่อคะแนนคณิตศาสตร์มากเป็นพิเศษเมื่อเทียบกับประเทศอื่น แต่เมื่อเทียบโรงเรียนในประเทศ *k* กันเอง ก็มีโรงเรียน *j* ที่ความชันของเชาวน์ปัญญาต่อคะแนนคณิตศาสตร์ยิ่งสูงมากๆ

ความชันสุ่ม

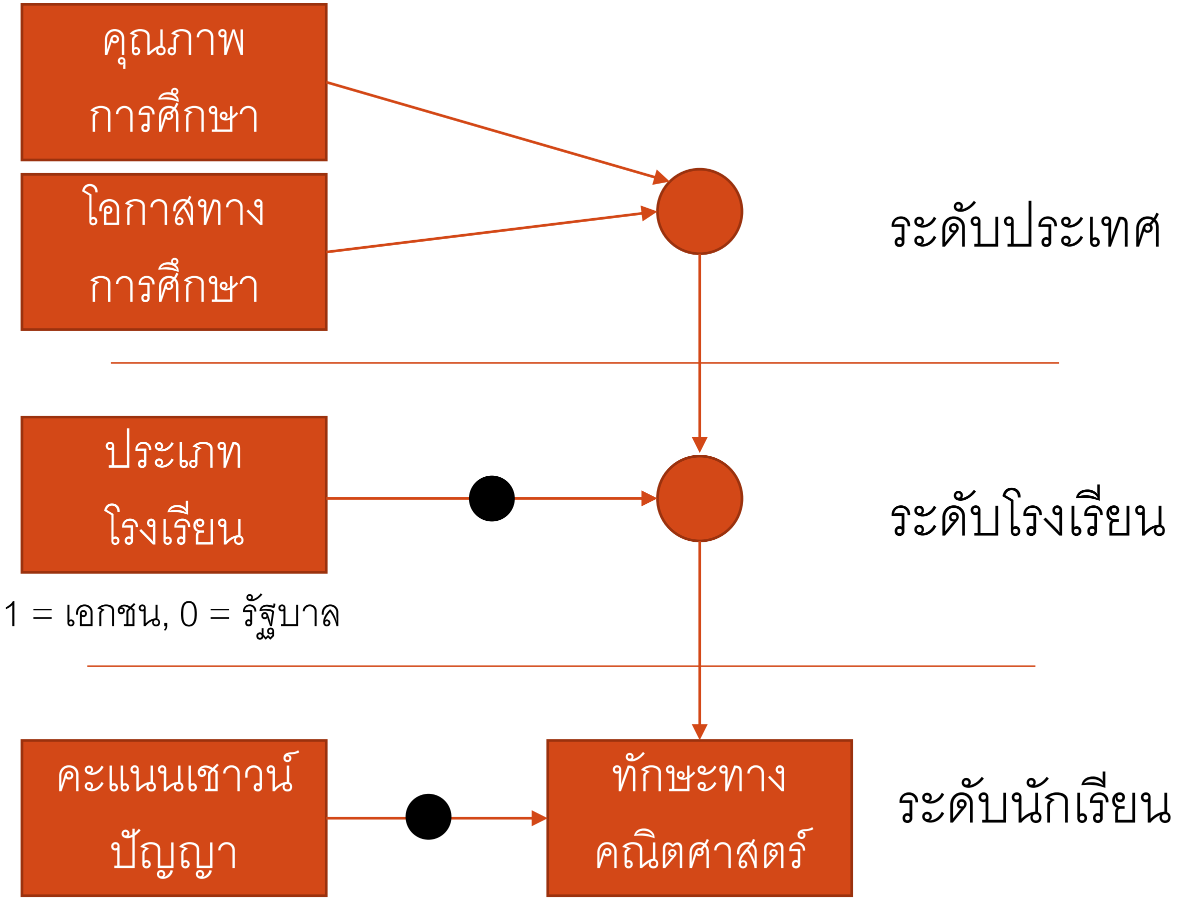
- ความชันของตัวแปรอิสระระดับที่ 1 จะแบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ
  - γ_{100} ค่าเฉลี่ยของความชันทุกหน่วยของระดับที่ 2 และทุกหน่วยของระดับที่ 3
  - τ_{11} ความแปรปรวนของความชัน ที่แตกต่างกันระหว่างหน่วยระดับที่ 2 ควบคุมหน่วยของระดับที่ 3 ให้คงที่
  - $\varphi_{10,10}$ ความแปรปรวนของความชัน ที่แตกต่างกันระหว่างหน่วยระดับที่ 3
- ความชันของตัวแปรอิสระระดับที่ 2 จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ
  - γ_{010} ค่าเฉลี่ยของความชันทุกหน่วยของตัวแปรระดับที่ 3
  - $\varphi_{01,01}$ ความแปรปรวนของความชัน ที่แตกต่างกันระหว่างหน่วยระดับที่ 3
- สามารถทดสอบความชันสุ่ม ได้ด้วย Likelihood Ratio Test

ความชันสุ่ม

- สำหรับตัวแปรระดับที่ 1 และระดับที่ 2 หากต้องการให้มีความชันสุ่ม ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม เพื่อให้ความชันสุ่มเป็นความชันสุ่มเฉพาะอิทธิพลของตัวแปรระดับนั้น
  - หากไม่ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม แล้วอนุญาตให้ตัวแปรทำนายระดับล่างมีความชันสุ่ม จะหมายถึงค่าเฉลี่ยของตัวแปรทำนายดังกล่าว มีอิทธิพลต่อตัวแปรตามแตกต่างกันระหว่างกลุ่มด้วย
  - หากทำนายความชันสุ่มของตัวแปรทำนายระดับล่าง ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวแปรดังกล่าว จะหมายความว่าค่าเฉลี่ยกลุ่มมีอิทธิพลแบบเส้นโค้ง (Curvilinear Relationship) ต่อตัวแปรตาม
  - นอกจากนี้ อิทธิพลเส้นโค้งของค่าเฉลี่ยกลุ่มถูกจำกัดให้มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของอิทธิพลของตัวแปรดังกล่าวในระดับล่าง (ดูบทที่ 7)
- อย่างไรก็ตาม ในเชิงปฏิบัติ ตัวแปรบางตัวจะไม่ย้ายศูนย์กลาง เช่น ตัวแปรเวลา กลุ่มการทดลอง เป็นต้น ซึ่งต้องระวังในการแปลความหมาย

ความชันสุ่ม

ทดสอบความชันสุ่มของคะแนนเชาวน์ปัญญาและประเภทโรงเรียน



ทดสอบว่าอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียน (ระดับที่ 1) ที่มีต่อผลสอบคณิตศาสตร์แตกต่างกันระหว่างโรงเรียน (ระดับที่ 2) หรือไม่

```
> m13 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + (1|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> m14 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + (1 + diffschooliqc|schoolid) + (1|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead", calc.derivs=FALSE))
> anova(m13, m14)
Data: dat1
Models:
m13: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
m14: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 + diffschooliqc | schoolid) + (1 | countryid)
    npar    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
m13   11 682935 683040 -341457   682913
m14   13 682939 683062 -341457   682913 0.2966  2     0.8622
```

ความชันสุ่มระดับโรงเรียน

ผลความชันสุ่มไม่ถึงระดับนัยสำคัญ เอาความชันสุ่มดังกล่าวออกจากโมเดล

ทดสอบว่าอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียน (ระดับที่ 1) ที่มีต่อผลสอบคณิตศาสตร์แตกต่างกันระหว่างประเทศ (ระดับที่ 3) หรือไม่

```
> m15 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+              + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+              + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc|countryid), data=dat1, REML=FALSE)
> anova(m13, m15)
Data: dat1
Models:
m13: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 | countryid)
m15: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc | countryid)
    npar    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
m13   11 682935 683040 -341457   682913
m15   13 682914 683038 -341444   682888 24.951  2  3.819e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ความชันสุ่มระดับประเทศ

ผลความชันสุ่มถึงระดับนัยสำคัญ ประเทศแต่ละประเทศ มีอิทธิพลเชาวน์ปัญญาที่มีผลสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายในแต่ละโรงเรียน แตกต่างกัน

ทดสอบว่าอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับโรงเรียน (ระดับที่ 2) ที่มีต่อผลสอบคณิตศาสตร์แตกต่างกันระหว่างประเทศ (ระดับที่ 3) หรือไม่

```
> m16 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffcountryiqc|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead", calc.derivs=FALSE))
> anova(m15, m16)
Data: dat1
Models:
m15: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc | countryid)
m16: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffcountry
iqc | countryid)
    npar    AIC    BIC  logLik deviance Chisq Df Pr(>Chisq)
m15   13 682914 683038 -341444   682888
m16   16 683220 683372 -341594   683188     0  3          1
```

ความชันสุ่มระดับประเทศ

ผลความชันสุ่มไม่ถึงระดับนัยสำคัญ นำความชันสุ่มของอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับโรงเรียนออก เหลือเพียงอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียนที่แตกต่างกันระหว่างประเทศ

ทดสอบว่าอิทธิพลประเภทโรงเรียนในระดับโรงเรียน (ระดับที่ 2) ที่มีต่อผลสอบคณิตศาสตร์แตกต่างกันระหว่างประเทศ (ระดับที่ 3) หรือไม่

```
> m17 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506) + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(m15, m17)
Data: dat1
Models:
m15: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc | countryid)
m17: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate + I(aveprivate -
 0.506) + I(quality - 53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate
 | countryid)
    npar    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
m15   13 682914 683038 -341444   682888
m17   16 682893 683045 -341430   682861 27.361  3  4.944e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ความชันสุ่มระดับประเทศ

ผลความชันถึงระดับนัยสำคัญ ความแตกต่างของคะแนนคณิตศาสตร์ระหว่างโรงเรียนเอกชนและรัฐบาลนั้น แตกต่างกันระหว่างประเทศอย่างมีนัยสำคัญ

สรุปผลการวิเคราะห์โมเดลความชันสุ่ม

```
> summary(m17)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc +
    0.691) + diffprivate + I(aveprivate - 0.506) + I(quality -
    53.33) + I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc +
    diffprivate | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 682893.0  683044.6 -341430.5  682861.0     96331

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.2371 -0.6574 -0.0020  0.6555  4.2284
```

```
Fixed effects:
                           Estimate Std. Error t value
(Intercept)               53.025482   0.087039 609.214
diffschooliqc              1.050549   0.061301  17.137  sig
diffcountryiqc             0.398762   0.095029   4.196  sig
I(avecountryiqc + 0.691)  -0.526992   0.218097  -2.416  sig
diffprivate                9.674217   0.181380  53.337  sig
I(aveprivate - 0.506)      8.034948   1.139680   7.050  sig
I(quality - 53.33)         0.009231   0.014959   0.617  not sig
I(opportunity - 47.98)     0.056229   0.021321   2.637  sig
```

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \pi_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + r_{0jk}$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = 53.03 - 0.53(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 8.03(\bar{W}_{.k} - 0.506)$$

$$+0.01(V_{1k} - 53.33) + 0.06(V_{2k} - 47.98) + u_{00k}$$

$$\pi_{01k} = 0.40 \qquad \pi_{02k} = 9.67 + u_{02k} \qquad \pi_{10k} = 1.05 + u_{10k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{ijk} &= 53.03 - 0.53(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 8.03(\bar{W}_{.k} - 0.506) + 0.01(V_{1k} - 53.33) \\ &+ 0.06(V_{2k} - 47.98) + 0.40(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + 9.67(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + 1.05(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) \\ &+ u_{10k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk} \end{aligned}}$$

```
Random effects:
 Groups     Name         Variance Std.Dev. Corr
 schoolid   (Intercept)  15.4898  3.9357
 countryid  (Intercept)   0.3185  0.5643
            diffschooliqc 0.1646  0.4057   -0.13
            diffprivate   1.4769  1.2153   -0.01  0.36
 Residual                64.3947  8.0246
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93
```

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk} \qquad Var(e_{ijk}) = 64.39$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \pi_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + r_{0jk} \qquad Var(r_{0jk}) = 15.49$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k}$$

$$\pi_{00k} = 53.03 - 0.53(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 8.03(\bar{W}_{.k} - 0.506) \qquad Var(u_{00k}) = 0.32$$

$$+0.01(V_{1k} - 53.33) + 0.06(V_{2k} - 47.98) + u_{00k} \qquad Var(u_{10k}) = 0.16$$

$$\pi_{01k} = 0.40 \qquad \pi_{02k} = 9.67 + u_{02k} \qquad \pi_{10k} = 1.05 + u_{10k} \qquad Var(u_{02k}) = 1.48$$

$$Cor\left(\begin{bmatrix} u_{00k} \\ u_{10k} \\ u_{02k} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & & \\ -.13 & & \\ -.01 & .36 & \end{bmatrix}$$

$$Y_{ijk} = 53.03 - 0.53(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 8.03(\bar{W}_{.k} - 0.506) + 0.01(V_{1k} - 53.33)$$
$$+0.06(V_{2k} - 47.98) + 0.40(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + 9.67(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + 1.05(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})$$
$$+ u_{10k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

ผลการสอบคณิตศาสตร์เมื่อประเทศค่าเฉลี่ย IQ เท่ากับ 89.64 (100 – 15 x 0.69) มีสัดส่วนโรงเรียนเอกชน 50.6% มีคุณภาพการศึกษาเท่ากับ 53.33 คะแนน มีโอกาสทางการศึกษาเท่ากับ 47.98 คะแนน จะเท่ากับ 53.03 คะแนน

หากประเทศมีคะแนนเชาวน์ปัญญาเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 15 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ ผลการสอบคณิตศาสตร์จะน้อยลง 0.53 คะแนน

ประเทศที่มีโรงเรียนเอกชน 100% จะมีผลการสอบคณิตศาสตร์มากกว่าประเทศที่มีโรงเรียนรัฐบาล 100% เท่ากับ 8.03 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่

หากประเทศมีดัชนีคุณภาพเพิ่มขึ้น 1 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ ผลการสอบคณิตศาสตร์จะเพิ่มขึ้น 0.01 คะแนน ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

หากประเทศมีดัชนีโอกาสทางการศึกษาเพิ่มขึ้น 1 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ ผลการสอบคณิตศาสตร์จะเพิ่มขึ้น 0.06 คะแนน

$$Y_{ijk} = 53.03 - 0.53(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 8.03(\bar{W}_{.k} - 0.506) + 0.01(V_{1k} - 53.33) + 0.06(V_{2k} - 47.98) + 0.40(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + 9.67(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + 1.05(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{10k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

$Var(u_{10k}) = 0.16$

$SD(u_{10k}) = 0.41$

$Var(u_{02k}) = 1.48$

$SD(u_{02k}) = 1.22$

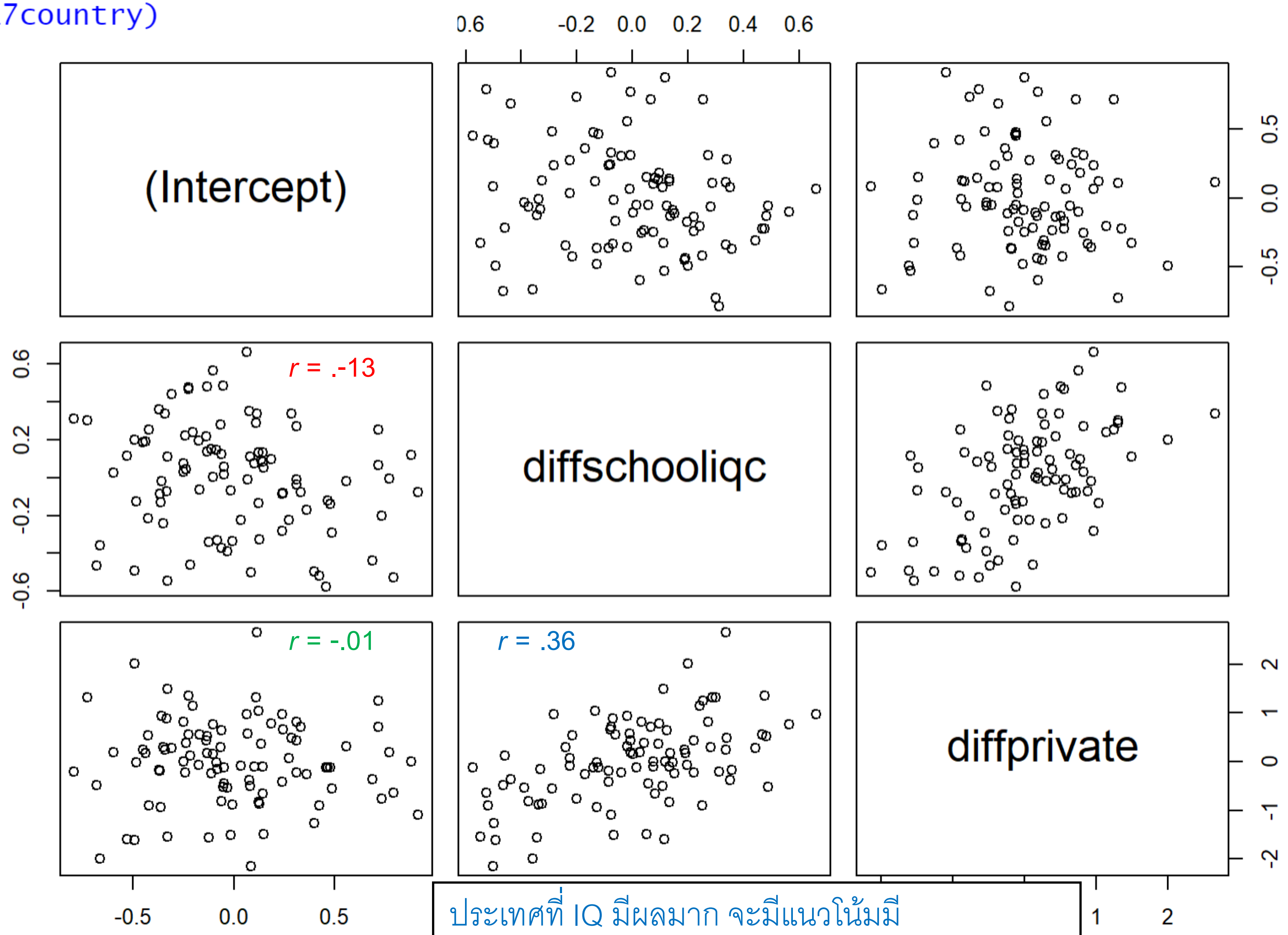
ภายในประเทศเดียวกัน โรงเรียนที่มีค่าเฉลี่ยเชาวน์ปัญญามากขึ้น 15 คะแนน ผลการสอบคณิตศาสตร์จะเพิ่มขึ้น 0.40 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่

เปรียบเทียบภายในประเทศเดียวกัน โรงเรียนเอกชนมีคะแนนสอบคณิตศาสตร์สูงกว่าโรงเรียนรัฐบาลโดยเฉลี่ยทุกประเทศเท่ากับ 9.67 คะแนน เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ โดยมีช่วงเชื่อมั่น 95% เท่ากับ 9.67 ± 1.96 x 1.22 = (7.28, 12.06)

ภายในโรงเรียนเดียวกัน นักเรียนมีคะแนนเชาวน์ปัญญาเพิ่มขึ้น 15 คะแนน ผลการสอบคณิตศาสตร์จะมากขึ้น 1.05 คะแนน เฉลี่ยทุกประเทศ โดยช่วงเชื่อมั่น 95% ของอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียนระหว่างประเทศเท่ากับ 1.05 ± 1.96 x 0.41 = (0.25, 1.85)

```
> ranefm17 <- ranef(m17)
> names(ranefm17)
[1] "schoolid"  "countryid"
> ranefm17country <- ranefm17$countryid
> plot(ranefm17country)
```

$$Cor\left(\begin{bmatrix} u_{00k} \\ u_{10k} \\ u_{02k} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & & \\ -.13 & & \\ -.01 & .36 & \end{bmatrix}$$



ประเทศที่ IQ มีผลมาก จะมีแนวโน้มมี
ความแตกต่างระหว่างโรงเรียนเอกชนและรัฐบาลสูง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ

- ความชันสุ่มเหล่านี้ ก็สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรอิสระ หรือที่เรียกว่าปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ เช่น

ระดับที่ 1 $Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}X_{ijk} + e_{ijk}$ $\quad Var(e_{ijk}) = \sigma^2$

ระดับที่ 2 $\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}W_{jk} + r_{0jk}$

$\beta_{1jk} = \pi_{10k} + \pi_{11k}W_{jk} + r_{1jk}$

$$Var\left(\begin{bmatrix} r_{0jk} \\ r_{1jk} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tau_{00} & \\ \tau_{10} & \tau_{01} \end{bmatrix}$$

ระดับที่ 3 $\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}V_k + u_{00k}$

$\pi_{10k} = \gamma_{100} + \gamma_{101}V_k + u_{10k}$

$\pi_{01k} = \gamma_{010} + \gamma_{011}V_k + u_{01k}$

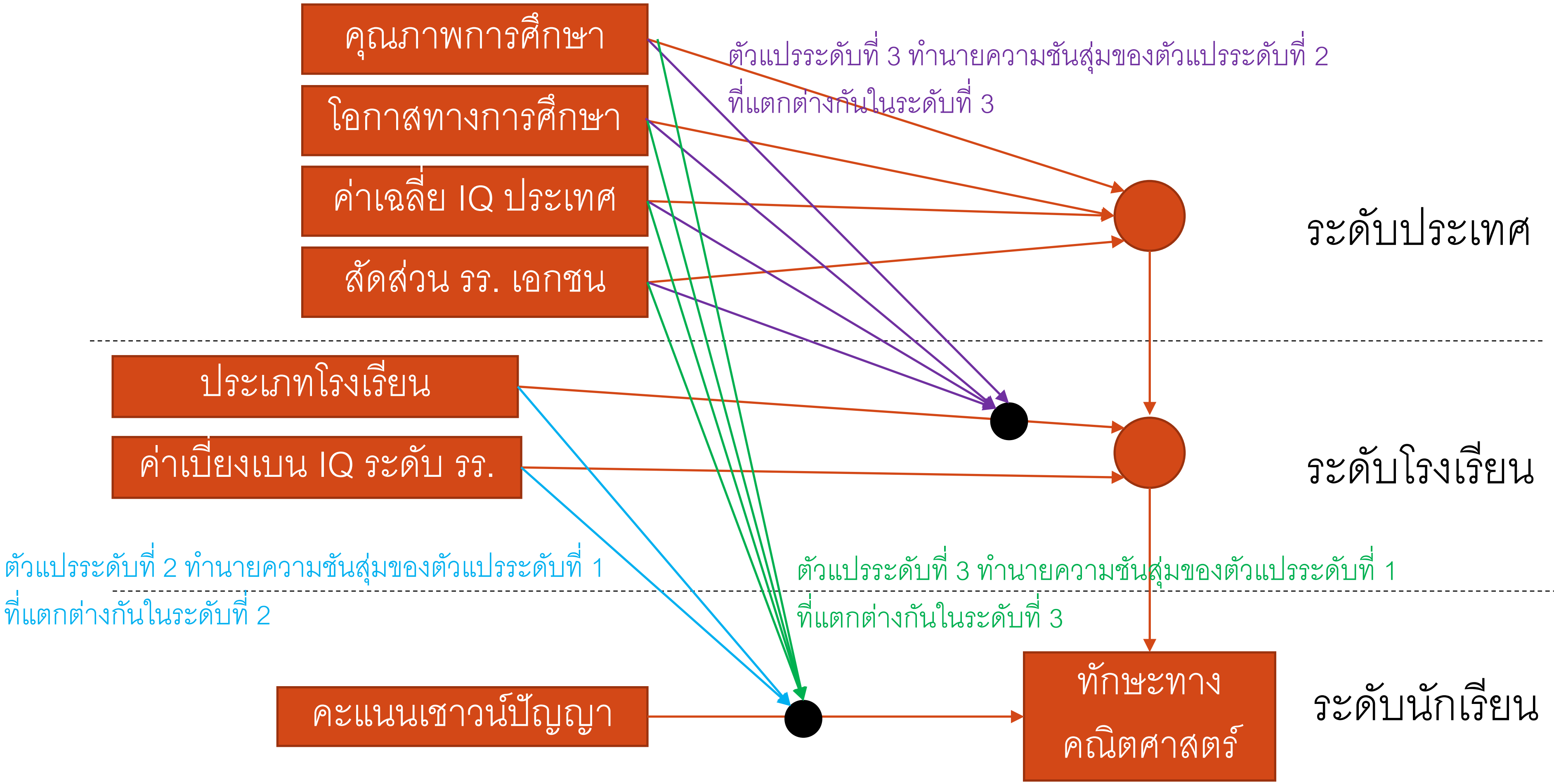
$\pi_{11k} = \gamma_{110} + \gamma_{111}V_k + u_{11k}$

$$Var\left(\begin{bmatrix} u_{00k} \\ u_{10k} \\ u_{01k} \\ u_{11k} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\Phi}$$

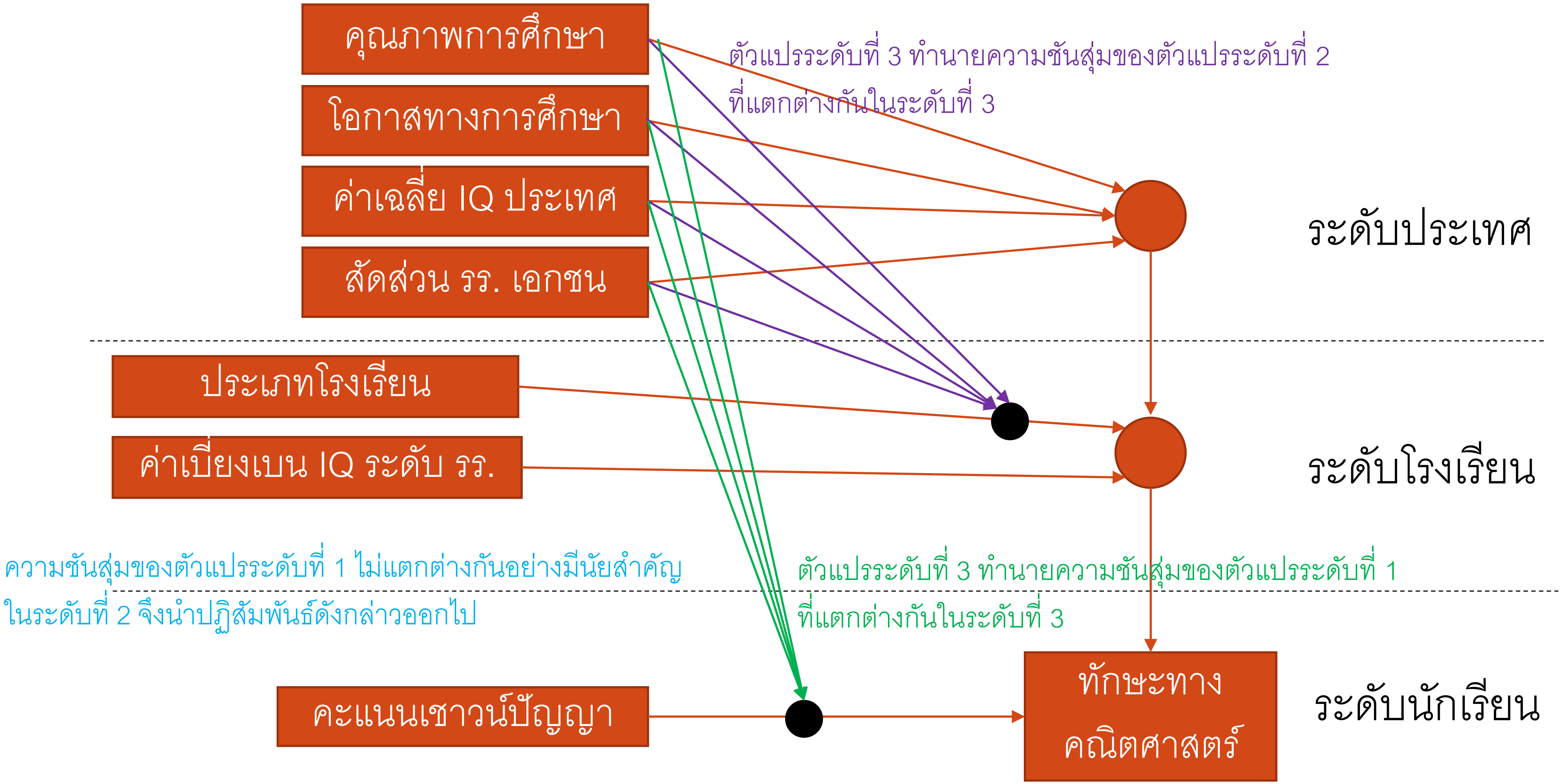
$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} = \gamma_{000} &+ \gamma_{001}V_k + \gamma_{010}W_{jk} + \gamma_{100}X_{ijk} \\
&+\gamma_{011}V_kW_{jk} + \gamma_{101}V_kX_{ijk} + \gamma_{110}W_{jk}X_{ijk} \\
&+\gamma_{111}V_kW_{jk}X_{ijk} \\
&+u_{10k}X_{ijk} + r_{1jk}X_{ijk} + u_{01k}W_{jk} + u_{11k}W_{jk}X_{ijk} \\
&+e_{ijk} + u_{00k} + r_{0jk}
\end{aligned}
$$

- ใน 3 บรรทัดแรก จะเป็นอิทธิพลคงที่ มีปฏิสัมพันธ์ 3 ทางระหว่างตัวแปร 3 ระดับ
  - บรรทัดแรก เป็นอิทธิพลหลัก (Main Effect)
  - บรรทัดที่ 2 เป็นอิทธิพลปฏิสัมพันธ์ 2 ทาง (Two-way Interaction Effect)
  - บรรทัดที่ 3 เป็นอิทธิพลปฏิสัมพันธ์ 3 ทาง (Three-way Interaction Effect)
- อิทธิพลสุ่มจะแบ่งเป็นดังนี้
  - ความชันสุ่มของตัวแปรระดับที่ 1 ที่มีความชันสุ่มในระดับที่ 2 และ 3
  - ความชันสุ่มของตัวแปรระดับที่ 2 ที่มีความชันสุ่มในระดับที่ 3
  - ความชันสุ่มของปฏิสัมพันธ์ตัวแปรระดับที่ 1 และ 2 ที่มีความชันสุ่มในระดับที่ 3
  - ค่าคงเหลือของทั้ง 3 ระดับ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ



ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ



```
> m18 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffprivate + I(aveprivate-0.506)
+             + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+             + diffschooliqc*I(avecountryiqc+0.691)
+             + diffschooliqc*I(aveprivate-0.506)
+             + diffschooliqc*I(quality-53.33) + diffschooliqc*I(opportunity-47.98)
+             + diffprivate*I(avecountryiqc+0.691) + diffprivate*I(aveprivate-0.506)
+             + diffprivate*I(quality-53.33) + diffprivate*I(opportunity-47.98)
+             + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
boundary (singular) fit: see help('isSingular')
```

ตัวแปรระดับที่ 3 ทำนายความชันสุ่มของตัวแปรระดับที่ 1 ที่แตกต่างกันในระดับที่ 3

ตัวแปรระดับที่ 3 ทำนายความชันสุ่มของตัวแปรระดับที่ 2 ที่แตกต่างกันในระดับที่ 3

```
Random effects:
 Groups    Name          Variance Std.Dev. Corr
 schoolid  (Intercept)   15.62031 3.9523
 countryid (Intercept)    0.19396 0.4404
           diffschooliqc  0.07027 0.2651   -1.00
           diffprivate    1.20862 1.0994   -0.22  0.22
 Residual                64.41749 8.0261
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93
```

เจอผลลัพธ์ที่ Random Effect มีความสัมพันธ์เท่ากับ -1 ซึ่งหมายความว่าค่าคงเหลือของจุดตัดในระดับที่ 3 และค่าคงเหลือของความชันของ IQ ในระดับที่ 3 มีค่าเดียวกัน (แค่กลับทิศทาง) เป็นหลักฐานว่าตัวแปรอธิบายโมเดลดีเกินไป หรือที่เรียกว่า Overfitting ควรแก้ไขโมเดล ไม่ควรแปลความหมายต่อ

โมเดลต่อไป ทดลองใส่ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระดับที่ 2 และ 1 ที่นำออกไปในการตัดสินใจครั้งแรก

```
> m19 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc+0.691)
+              + diffprivate + I(aveprivate-0.506)
+              + I(quality-53.33) + I(opportunity-47.98)
+              + diffschooliqc*diffcountryiqc + diffschooliqc*I(avecountryiqc+0.691)
+              + diffschooliqc*diffprivate + diffschooliqc*I(aveprivate-0.506)
+              + diffschooliqc*I(quality-53.33) + diffschooliqc*I(opportunity-47.98)
+              + diffprivate*I(avecountryiqc+0.691) + diffprivate*I(aveprivate-0.506)
+              + diffprivate*I(quality-53.33) + diffprivate*I(opportunity-47.98)
+              + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m19)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + I(avecountryiqc +
    0.691) + diffprivate + I(aveprivate - 0.506) + I(quality -
    53.33) + I(opportunity - 47.98) + diffschooliqc * diffcountryiqc +
    diffschooliqc * I(avecountryiqc + 0.691) + diffschooliqc *
    diffprivate + diffschooliqc * I(aveprivate - 0.506) + diffschooliqc *
    I(quality - 53.33) + diffschooliqc * I(opportunity - 47.98) +
    diffprivate * I(avecountryiqc + 0.691) + diffprivate * I(aveprivate -
    0.506) + diffprivate * I(quality - 53.33) + diffprivate *
    I(opportunity - 47.98) + (1 | schoolid) + (1 + diffschooliqc +
    diffprivate | countryid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

      AIC       BIC    logLik  deviance  df.resid
 682897.1  683143.5 -341422.6  682845.1     96321
```

ตัวแปรระดับที่ 2 ทำนายความชันสุ่มของตัวแปรระดับที่ 1 ที่แตกต่างกันในระดับที่ 2

ปรากฏว่าไม่มีปัญหา Overfitting จึงแปลความหมายต่อไป

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	t value	
(Intercept)	53.025597	0.086988	609.575	sig
diffschooliqc	1.051312	0.058743	17.897	sig
diffcountryiqc	0.397862	0.095013	4.187	sig
I(avecountryiqc + 0.691)	-0.513380	0.218358	-2.351	sig
diffprivate	9.678933	0.173924	55.650	sig
I(aveprivate - 0.506)	7.924078	1.141082	6.944	sig
I(quality - 53.33)	0.007428	0.014977	0.496	not sig
I(opportunity - 47.98)	0.057172	0.021349	2.678	sig
diffschooliqc:diffcountryiqc	0.028850	0.066203	0.436	not sig
diffschooliqc:I(avecountryiqc + 0.691)	-0.161863	0.147438	-1.098	not sig
diffschooliqc:diffprivate	0.073798	0.089377	0.826	not sig
diffschooliqc:I(aveprivate - 0.506)	1.370775	0.767711	1.786	not sig
diffschooliqc:I(quality - 53.33)	0.021495	0.010087	2.131	sig
diffschooliqc:I(opportunity - 47.98)	-0.012237	0.014372	-0.851	not sig
I(avecountryiqc + 0.691):diffprivate	-0.190150	0.437168	-0.435	not sig
diffprivate:I(aveprivate - 0.506)	2.104055	2.309722	0.911	not sig
diffprivate:I(quality - 53.33)	0.053836	0.030011	1.794	not sig
diffprivate:I(opportunity - 47.98)	-0.105363	0.042618	-2.472	sig

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \pi_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + r_{0jk}$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k} + \pi_{11k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}) + \pi_{12k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})$$

$$\pi_{00k} = 53.03 - 0.52(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 7.92(\bar{W}_{.k} - 0.506)$$
$$+0.01(V_{1k} - 53.33) + 0.06(V_{2k} - 47.98) + u_{00k}$$

$$\pi_{01k} = 0.40$$

$$\pi_{10k} = 1.05 - 0.16(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 1.37(\bar{W}_{.k} - 0.506)$$
$$+0.02(V_{1k} - 53.33) - 0.01(V_{2k} - 47.98) + u_{10k}$$

$$\pi_{11k} = 0.03$$

$$\pi_{02k} = 9.67 - 0.19(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691) + 2.10(\bar{W}_{.k} - 0.506)$$
$$+0.05(V_{1k} - 53.33) - 0.11(V_{2k} - 47.98) + u_{02k}$$

$$\pi_{12k} = 0.07$$

```
Random effects:
 Groups    Name          Variance Std.Dev. Corr
 schoolid  (Intercept)   15.4932  3.9361
 countryid (Intercept)    0.3176  0.5635
           diffschooliqc  0.1359  0.3687   -0.13
           diffprivate    1.2304  1.1092   -0.01  0.34
 Residual                64.3936  8.0246
Number of obs: 96347, groups:  schoolid, 4787; countryid, 93
```

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}\right) + e_{ijk} \qquad Var\left(e_{ijk}\right) = 64.39$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}\left(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}\right) + \pi_{02k}\left(W_{jk} - \bar{W}_{.k}\right) + r_{0jk} \qquad Var\left(r_{0jk}\right) = 15.49$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k} + \pi_{11k}\left(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{..k}\right) + \pi_{12k}\left(W_{jk} - \bar{W}_{.k}\right)$$

$$\pi_{00k} = 53.03 - 0.52\left(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691\right) + 7.92\left(\bar{W}_{.k} - 0.506\right) + 0.01\left(V_{1k} - 53.33\right) + 0.06\left(V_{2k} - 47.98\right) + u_{00k}$$

$$\pi_{10k} = 1.05 - 0.16\left(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691\right) + 1.37\left(\bar{W}_{.k} - 0.506\right) + 0.02\left(V_{1k} - 53.33\right) - 0.01\left(V_{2k} - 47.98\right) + u_{10k}$$

$$\pi_{02k} = 9.67 - 0.19\left(\bar{\bar{X}}_{..k} + 0.691\right) + 2.10\left(\bar{W}_{.k} - 0.506\right) + 0.05\left(V_{1k} - 53.33\right) - 0.11\left(V_{2k} - 47.98\right) + u_{02k}$$

$\pi_{01k} = 0.40$

$Var\left(u_{00k}\right) = 0.32$

$\pi_{11k} = 0.03$

$Var\left(u_{10k}\right) = 0.14$

$\pi_{12k} = 0.07$

$Var\left(u_{02k}\right) = 1.23$

ขอข้ามการตีความหมายค่าแต่ละค่าไปที่การตรวจสอบปฏิสัมพันธ์เลย

$$Cor\left(\begin{bmatrix} u_{00k} \\ u_{10k} \\ u_{02k} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & & \\ -.13 & & \\ -.01 & .34 & \end{bmatrix}$$

ตัวแปรปฏิสัมพันธ์ 2 คู่ ถึงระดับนัยสำคัญ คือ

1. diffschooliqc : quality ปฏิสัมพันธ์ระหว่างอิทธิพลเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียน และดัชนีคุณภาพการศึกษาระดับประเทศ
2. diffprivate : opportunity ปฏิสัมพันธ์ระหว่างความแตกต่างระหว่างโรงเรียนเอกชนและรัฐบาลภายในประเทศและดัชนีโอกาสทางการศึกษาระดับประเทศ

สร้างโมเดลหลีกเลี่ยง I ( ) เพื่อใช้ในการตรวจปฏิสัมพันธ์ต่อไป

```
> dat1$avecountryiqcc <- dat1$avecountryiqc + 0.691
> dat1$aveprivatec <- dat1$aveprivate - 0.506
> dat1$qualityc <- dat1$quality - 53.33
> dat1$opportunityc <- dat1$opportunity - 47.98
>
> m20 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + avecountryiqcc
+              + diffprivate + aveprivatec
+              + qualityc + opportunityc
+              + diffschooliqc*diffcountryiqc + diffschooliqc*avecountryiqcc
+              + diffschooliqc*diffprivate + diffschooliqc*aveprivatec
+              + diffschooliqc*qualityc + diffschooliqc*opportunityc
+              + diffprivate*avecountryiqcc + diffprivate*aveprivatec
+              + diffprivate*qualityc + diffprivate*opportunityc
+              + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
```

เลือกค่าเพื่อใช้ตรวจสอบปฏิสัมพันธ์

```
> mdiq <- mean(dat1$diffschooliqc)
> sddiq <- sd(dat1$diffschooliqc)
>
> mq <- mean(dat1country$quality)
> sdq <- sd(dat1country$quality)
>
> mo <- mean(dat1country$opportunity)
> sdo <- sd(dat1country$opportunity)
>
> diffschooliqcval <- c(mdiq - sddiq, mdiq, mdiq + sddiq)
> qualitycval <- c(mq - sdq, mq, mq + sdq) - 53.33
> opportunitycval <- c(mo - sdo, mo, mo + sdo) - 47.98
```

IQ ภายในโรงเรียน ตรวจสอบค่าที่ (*M* – *SD*, *M*, *M* + *SD*)

คุณภาพทางการศึกษา และโอกาสทางการศึกษา ตรวจสอบค่าที่ (*M* – *SD*, *M*, *M* + *SD*)

เนื่องจากคำสั่ง `sim_slopes` ใน `interactions` package วิเคราะห์ข้อมูลช้ามาก (12 ชั่วโมงไม่เสร็จ) ซึ่งผมไม่ทราบว่าเกิดจากอะไร ทั้งที่ไม่ควรมีเรื่องอะไรให้คำนวณเยอะขนาดนั้น ผมจึงเขียน function ขึ้นมาเอง เรียกใช้ฟังก์ชั่นดังกล่าว โดยนำไฟล์ที่มีฟังก์ชั่นไปใส่ใน working directory แล้วใช้คำสั่งด้านล่าง

```
> source("quicksimslopeslme4.R")
```

```
> quick_sim_slopes(model=m20, pred="diffschooliqc", modx="qualityc", modx.values=qualitycval)
$`Conditional Intercept`
   modx.values      est         se        z p
1 -12.61890497 52.93187 0.20710909 255.5748 0
2  -0.00311828 53.02557 0.08698733 609.5781 0
3  12.61266841 53.11928 0.20891541 254.2621 0

$`Conditional Slope`
   modx.values       est         se         z p
1 -12.61890497 0.7800707 0.13869915  5.624192 0
2  -0.00311828 1.0512453 0.05874261 17.895790 0
3  12.61266841 1.3224199 0.14160476  9.338810 0
```

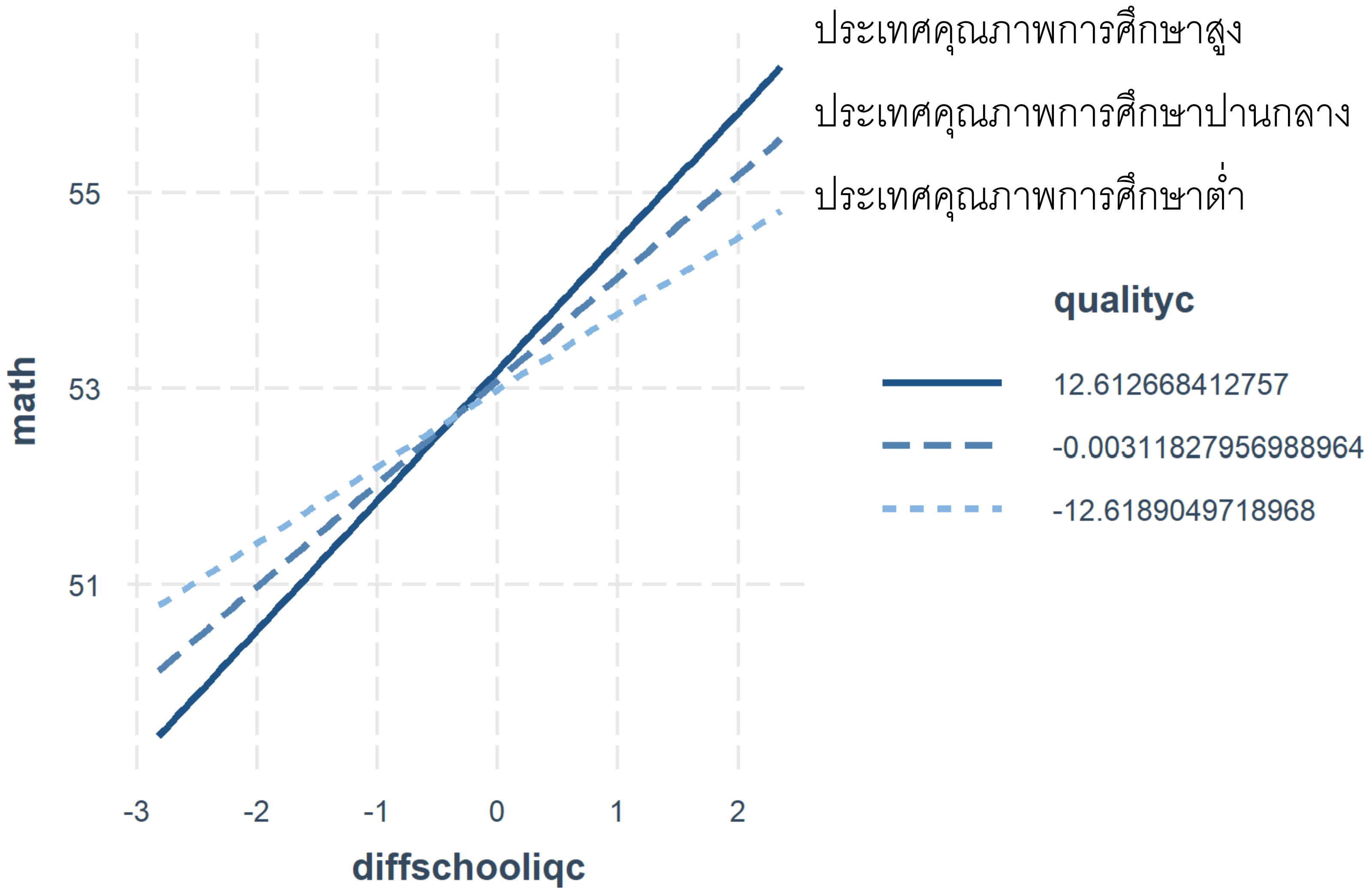
คุณภาพ	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	*SE*	*Z*	*b*	*SE*	*z*
ต่ำ	52.93	0.21	255.57**	0.78	0.14	5.62**
ปานกลาง	53.03	0.09	609.58**	1.05	0.06	17.90**
สูง	53.12	0.21	254.26**	1.32	0.14	9.34**

ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาต่ำ อิทธิพลของเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียนต่อคะแนนคณิตศาสตร์ในทางบวก

ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาปานกลาง อิทธิพลของเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียนต่อคะแนนคณิตศาสตร์ในทางบวกที่สูงขึ้น

ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาสูง อิทธิพลของเชาวน์ปัญญาระดับนักเรียนต่อคะแนนคณิตศาสตร์ในทางบวกที่สูงขึ้น

```
> interact_plot(model=m20, pred="diffschooliqc", modx="qualityc", modx.values=qualitycval)
```



```
> quick_sim_slopes(model=m20, pred="qualityc", modx="diffschooliqc", modx.values=diffschooliqcval)
$`Conditional Intercept`
    modx.values      est         se        z p
1 -5.854771e-01 52.41008 0.09539799 549.3835 0
2 -5.835356e-19 53.02560 0.08698788 609.5746 0
3  5.854771e-01 53.64112 0.09164473 585.3159 0

$`Conditional Slope`
    modx.values          est         se          z        p
1 -5.854771e-01 -0.005157213 0.01641730 -0.3141328 0.753420
2 -5.835356e-19  0.007427539 0.01497748  0.4959138 0.619955
3  5.854771e-01  0.020012290 0.01577583  1.2685409 0.204605
```

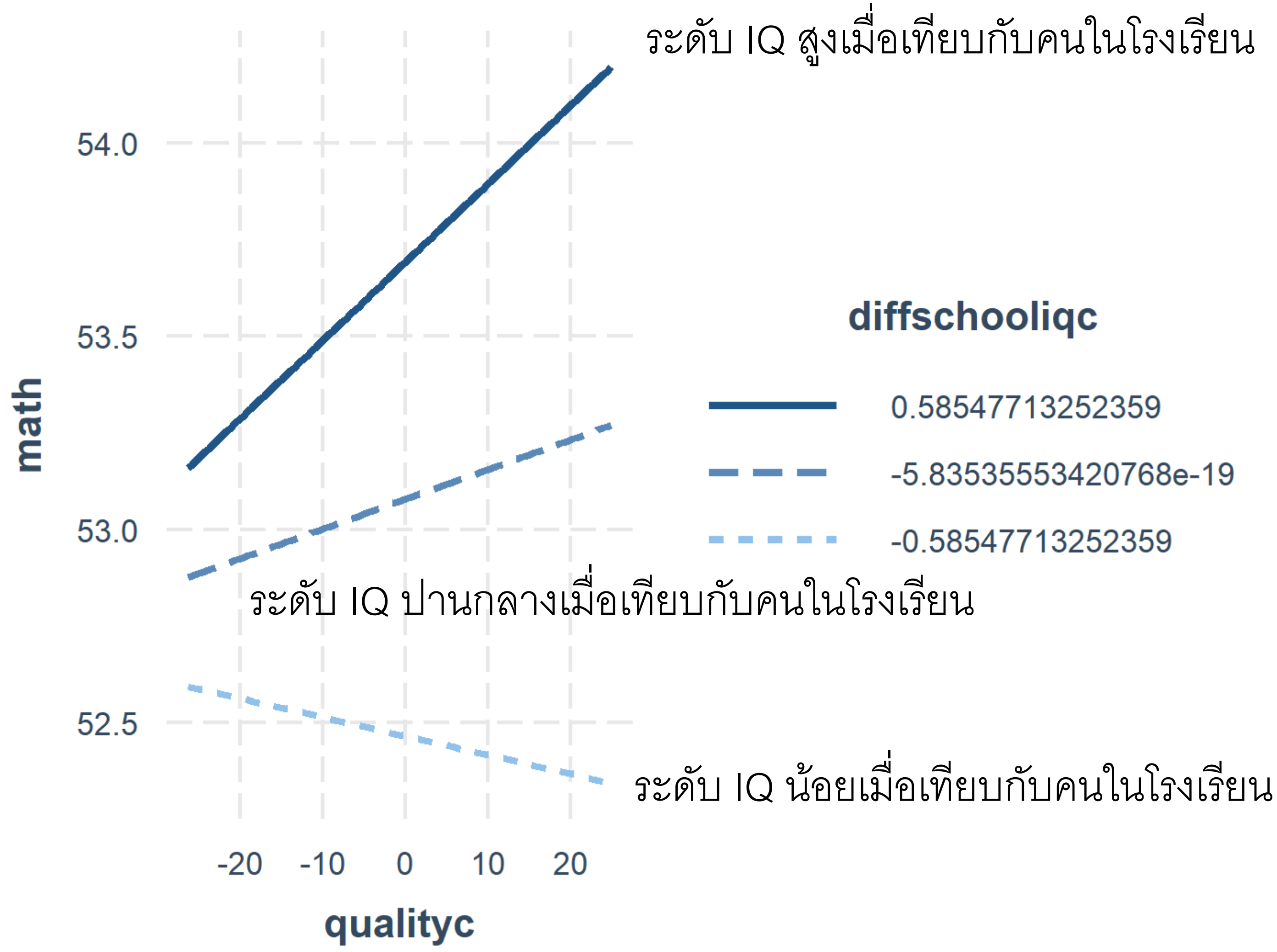
IQ นักเรียนเทียบภายในโรงเรียน	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	*SE*	*Z*	*b*	*SE*	*z*
น้อย	52.41	0.10	549.38**	-0.01	0.016	$\boxed{-0.31}$
ปานกลาง	53.03	0.09	609.57**	0.01	0.015	$\boxed{0.50}$
มาก	53.64	0.09	585.32**	0.02	0.016	$\boxed{1.27}$

นักเรียนที่ IQ น้อย ถ้าอยู่ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาสูง จะมีแนวโน้มที่คะแนนเลขน้อยลง แต่ผลไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

นักเรียนที่ IQ ปานกลาง ถ้าอยู่ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาสูง จะมีแนวโน้มที่คะแนนเลขสูงขึ้น แต่ผลไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

นักเรียนที่ IQ สูง ถ้าอยู่ในประเทศที่คุณภาพการศึกษาสูง จะมีแนวโน้มที่คะแนนเลขสูงขึ้น แต่ผลไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

```
> interact_plot(model=m20, pred="qualityc", modx="diffschooliqc", modx.values=diffschooliqcval)
```



```
> quick_sim_slopes(model=m20, pred="diffprivate", modx="opportunityc", modx.values=opportunitycval)
$`Conditional Intercept`
   modx.values      est         se        z p
1 -7.475441355 52.59821 0.18238446 288.3919 0
2 -0.004086022 53.02536 0.08698863 609.5666 0
3  7.467269312 53.45252 0.18098416 295.3436 0

$`Conditional Slope`
   modx.values       est        se        z p
1 -7.475441355 10.466564 0.3640795 28.74802 0
2 -0.004086022  9.679364 0.1739255 55.65234 0
3  7.467269312  8.892163 0.3615502 24.59454 0
```

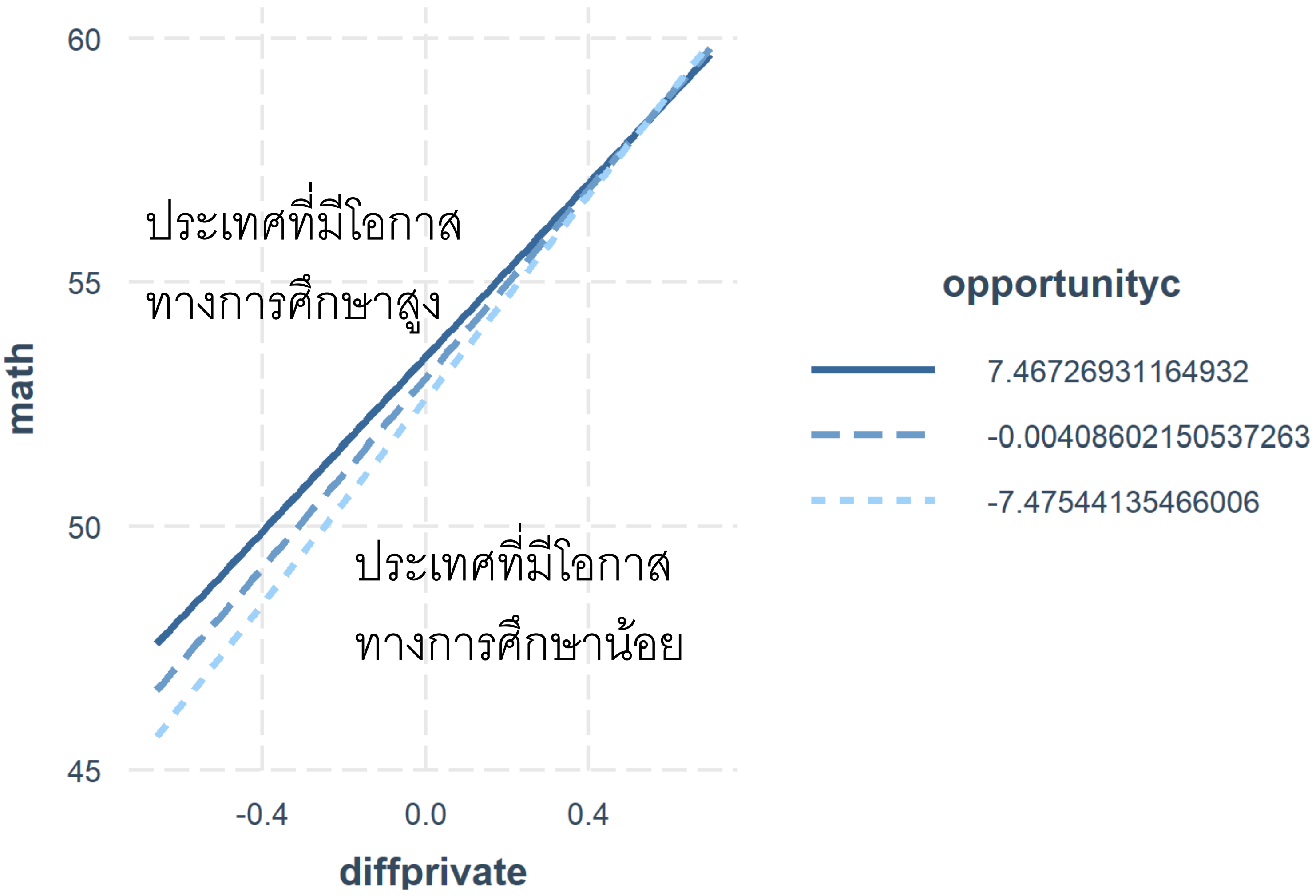
โอกาส	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	*SE*	*Z*	*b*	*SE*	*z*
น้อย	52.60	0.18	288.39**	10.47	0.36	28.75**
ปานกลาง	53.03	0.09	609.57**	9.68	0.17	55.65**
มาก	53.45	0.18	295.34**	8.89	0.36	24.59**

ในประเทศที่โอกาสการศึกษาน้อย โรงเรียนเอกชนจะมีผลสอบเลขสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาลอย่างมีนัยสำคัญ

ในประเทศที่โอกาสการศึกษาปานกลาง โรงเรียนเอกชนจะมีผลสอบเลขสูงกว่าโรงเรียนรัฐอย่างมีนัยสำคัญ

ในประเทศที่โอกาสการศึกษาสูง โรงเรียนเอกชนจะมีผลสอบเลขสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาลอย่างมีนัยสำคัญ แต่ความแตกต่างน้อยลง

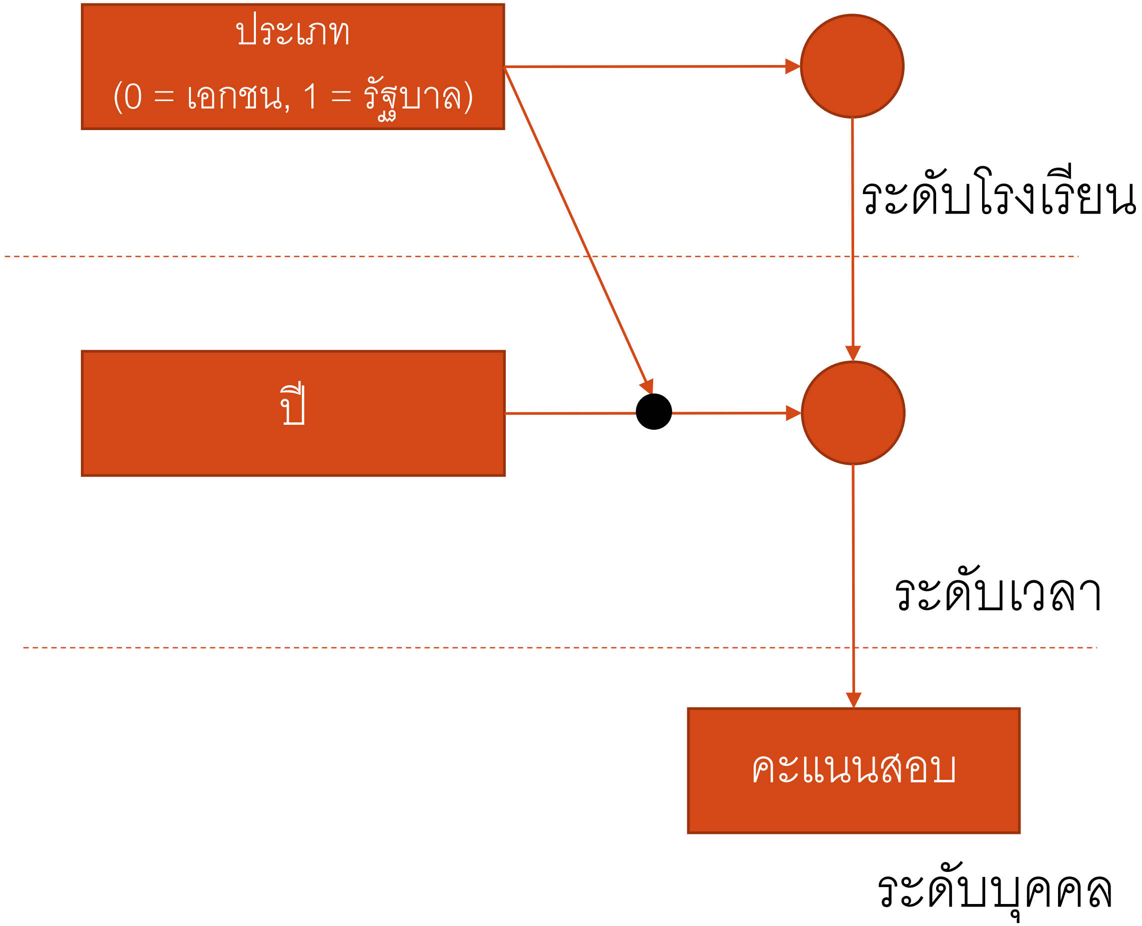
```
> interact_plot(model=m20, pred="diffprivate", modx="opportunityc", modx.values=opportunitycval)
```



โมเดลระยะยาว

ต้องการทดสอบการเปลี่ยนแปลงคะแนนสอบมาตรฐานในช่วง 3 ปี ของ 100 โรงเรียน

เก็บข้อมูลจากนักเรียนปี 2017, 2018, 2019 โดยไม่ได้ติดตามข้อมูลจากนักเรียนคนเดียวกัน แต่ติดตามข้อมูลจากโรงเรียนเดียวกัน



โมเดลระยะยาว

ID ระดับนักเรียน (ระดับที่ 1) ID ระดับเวลา (ระดับที่ 2) ID ระดับโรงเรียน (ระดับที่ 3)

```
> dat2 <- read.table("lecture10ex2.csv", sep=",", header=TRUE)
> psych::describe(dat2)
          vars     n     mean      sd  median trimmed     mad  min   max range  skew kurtosis    se
subjectid    1 22642 11321.50 6536.33 11321.5 11321.50 8392.26    1 22642 22641  0.00    -1.20 43.44
timeid       2 22642   152.07   87.22   153.0   152.52  112.68    1   300   299 -0.04    -1.21  0.58
schoolid     3 22642    51.02   29.08    51.0    51.17   37.06    1   100    99 -0.04    -1.21  0.19
test         4 22642    50.00   10.00    50.0    50.05   10.38   13    90    77 -0.05    -0.04  0.07
year         5 22642  2018.01    0.82  2018.0  2018.02    1.48 2017  2019     2 -0.02    -1.50  0.01
public       6 22642     0.51    0.50     1.0     0.51    0.00    0     1     1 -0.04    -2.00  0.00
```

4. คะแนนสอบ (ตัวแปรระดับนักเรียน)

5. ปี (ตัวแปรระดับเวลา) มีค่า 2017, 2018, และ 2019

6. ประเภทของโรงเรียน (ตัวแปรระดับโรงเรียน) 1 = รัฐบาล 0 = เอกชน

นักวิเคราะห์สามารถเปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่มี 2 ระดับ (บุคคลซ้อนในเวลา) และโมเดลที่มี 3 ระดับ (บุคคลซ้อนในเวลาซ้อนในโรงเรียน) ว่าโมเดลใด เหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากันได้

```
> dat2$yearc <- dat2$year - 2017
> m21 <- lmer(test ~ 1 + yearc + (1|timeid), data=dat2, REML=FALSE)
> m22 <- lmer(test ~ 1 + yearc + (1|timeid) + (1|schoolid), data=dat2, REML=FALSE)
> anova(m21, m22)
Data: dat2
Models:
m21: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid)
m22: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid) + (1 | schoolid)
    npar    AIC    BIC logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
m21    4 152462 152494 -76227   152454
m22    5 152311 152351 -76150   152301 153.42  1  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ในที่นี้หมายความว่า โรงเรียนสามารถอธิบายความแปรปรวนของคะแนนสอบได้เพิ่มเติมจากเวลาที่แตกต่างกัน

```
> summary(m22)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid) + (1 | schoolid)
   Data: dat2

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
152310.8 152350.9 -76150.4 152300.8    22637

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.1126 -0.6591 -0.0068  0.6689  3.9155

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 timeid   (Intercept) 14.69    3.833
 schoolid (Intercept) 35.80    5.983
 Residual             46.39    6.811
Number of obs: 22642, groups:  timeid, 300; schoolid, 100

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  47.7911     0.6970   68.57
yearc         2.2008     0.2768    7.95
```

$$\sigma^2 = 46.39$$

$$\tau_{00} = 14.69$$

$$\varphi_{00} = 35.80$$

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk}$$

$$\pi_{00k} = 47.79 + u_{00k}$$

คะแนนสอบปี 2017 เฉลี่ยทุกโรงเรียน = 47.79 คะแนน

$$\pi_{01k} = 2.20$$

คะแนนสอบเพิ่มขึ้น 2.2 คะแนนต่อปีโดยเฉลี่ย

เปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่ให้การเปลี่ยนแปลงเหมือนกันทุกโรงเรียน กับโมเดลที่ให้การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นแตกต่างกันระหว่างโรงเรียน

```
> m23 <- lmer(test ~ 1 + yearc + (1|timeid) + (1 + yearc|schoolid),
+              data=dat2, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(m22, m23)
Data: dat2
Models:
m22: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid) + (1 | schoolid)
m23: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid) + (1 + yearc | schoolid)
    npar    AIC    BIC logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
m22    5 152311 152351 -76150   152301
m23    7 152261 152317 -76123   152247 53.968  2   1.91e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นแตกต่างกันระหว่างโรงเรียนอย่างมีนัยสำคัญ

```
> summary(m23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: test ~ 1 + yearc + (1 | timeid) + (1 + yearc | schoolid)
   Data: dat2
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC       BIC    logLik deviance df.resid
152260.8 152317.0 -76123.4 152246.8    22635

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.1140 -0.6572 -0.0027  0.6676  3.9245

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 timeid   (Intercept)  7.688   2.773
 schoolid (Intercept) 23.215   4.818
          yearc        7.003   2.646    0.31
 Residual             46.388   6.811
Number of obs: 22642, groups:  timeid, 300; schoolid, 100

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  47.7904     0.5492  87.022
yearc         2.2014     0.3342   6.588
```

$$\sigma^2 = 46.39$$

$$\tau_{00} = 7.69$$

$$\varphi_{00} = 23.22$$

$$\varphi_{11} = 7.00 \qquad \rho_{01} = .31$$

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk}$$

$$\pi_{00k} = 47.79 + u_{00k}$$

$$\pi_{01k} = 2.20 + u_{01k}$$

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk} \qquad \sigma^2 = 46.39$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk} \qquad \tau_{00} = 7.69$$

$$\pi_{00k} = 47.79 + u_{00k} \qquad \varphi_{00} = 23.22$$

$$\pi_{01k} = 2.20 + u_{01k} \qquad \varphi_{11} = 7.00 \qquad \rho_{01} = .31$$

คะแนนสอบในปี 2017 เฉลี่ยทุกโรงเรียนเท่ากับ 47.79 คะแนน มีช่วงเชื่อมั่น 95% ของคะแนนสอบปี 2017 เฉลี่ยระดับโรงเรียน เท่ากับ $47.79 \pm 1.96 \times \sqrt{23.22} = (38.35, 57.23)$ คะแนน

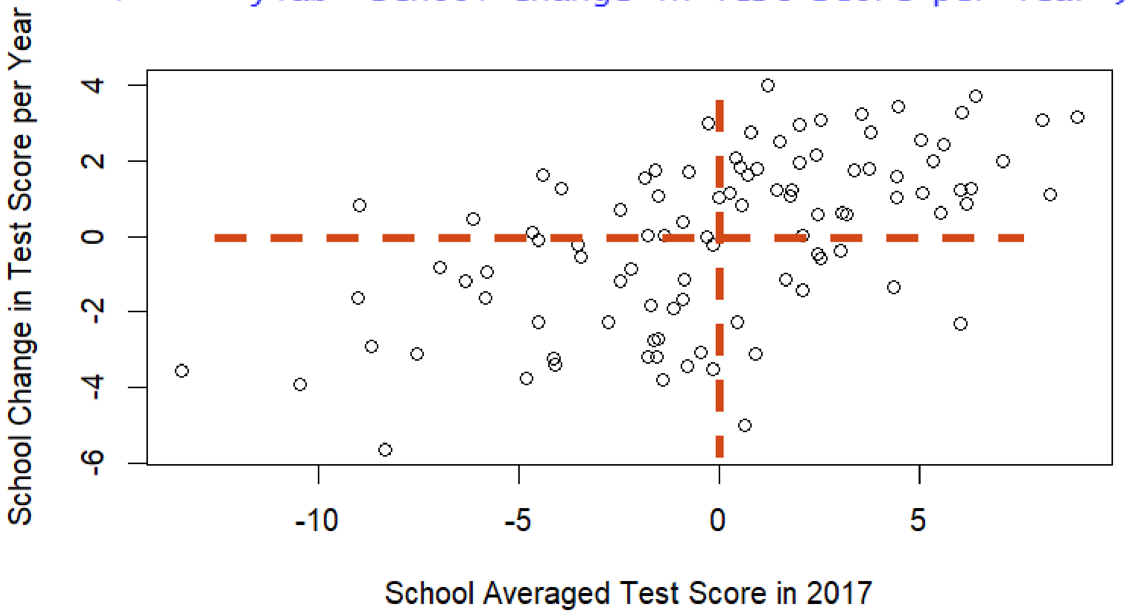
คะแนนสอบเพิ่มขึ้นเฉลี่ยทุกโรงเรียนเท่ากับ 2.20 คะแนน มีช่วงเชื่อมั่น 95% เท่ากับ $2.20 \pm 1.96 \times \sqrt{7.00} = (-2.99, 7.39)$ คะแนนต่อปี

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$
$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk}$$
$$\pi_{00k} = 47.79 + u_{00k}$$
$$\pi_{01k} = 2.20 + u_{01k}$$

$$\sigma^2 = 46.39$$
$$\tau_{00} = 7.69$$
$$\varphi_{00} = 23.22$$
$$\varphi_{11} = 7.00 \qquad \rho_{01} = .31$$

หากคะแนนสอบในปี 2017 มีค่ามาก จะมีแนวโน้มที่การเพิ่มขึ้นของคะแนนสอบมีค่ามากขึ้น โดยมีค่าสหสัมพันธ์เท่ากับ .31

```
> plot(ranef(m23)$schoolid, xlab="School Averaged Test Score in 2017",
+      ylab="School Change in Test Score per Year")
```



ใส่ตัวแปรประเภทของโรงเรียน

```
> m24 <- lmer(test ~ 1 + yearc*public + (1|timeid) + (1 + yearc|schoolid)
+              data=dat2, REML=FALSE,
+              control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(m24)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: test ~ 1 + yearc * public + (1 | timeid) + (1 + yearc | schoolid)
   Data: dat2
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
152197.7 152270.0 -76089.9 152179.7    22633

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.1095 -0.6573 -0.0025  0.6701  3.9244

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 timeid   (Intercept)  7.688   2.773
 schoolid (Intercept) 18.166   4.262
          yearc        3.477   1.865    -0.03
 Residual             46.387   6.811
Number of obs: 22642, groups:  timeid, 300; schoolid, 100

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept)   50.0372     0.7090  70.571
yearc          4.0804     0.3910  10.434
public        -4.4942     1.0022  -4.484
yearc:public  -3.7575     0.5528  -6.797
```

$$\sigma^2 = 46.39$$

$$\tau_{00} = 7.69$$

$$\varphi_{00} = 18.17$$

$$\varphi_{11} = 3.48 \qquad \rho_{01} = -.03$$

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$

$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk}$$

$$\pi_{00k} = 50.04 - 4.49W_{1k} + u_{00k}$$

$$\pi_{01k} = 4.08 - 3.76W_{1k} + u_{01k}$$

$$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + e_{ijk}$$
$$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}T_{jk} + r_{0jk}$$
$$\pi_{00k} = 50.04 - 4.49W_{1k} + u_{00k}$$
$$\pi_{01k} = 4.08 - 3.76W_{1k} + u_{01k}$$

$$\sigma^2 = 46.39$$
$$\tau_{00} = 7.69$$
$$\varphi_{00} = 18.17$$
$$\varphi_{11} = 3.48 \qquad \rho_{01} = -.03$$

$$Y_{ijk} = 50.04 - 4.49W_{1k} + 4.08T_{jk} - 3.76W_{1k}T_{jk} + u_{00k} + u_{01k}T_{jk} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

คะแนนสอบในปี 2017 เฉลี่ยระหว่างโรงเรียนเอกชนเท่ากับ 50.04 คะแนน

โรงเรียนเอกชน มีคะแนนสอบเพิ่มขึ้นเฉลี่ยทุกโรงเรียนเท่ากับ 4.08 คะแนนต่อปี

โรงเรียนรัฐบาลมีคะแนนสอบในปี 2017 เฉลี่ยน้อยกว่าโรงเรียนเอกชนเท่ากับ 4.49 คะแนน

โรงเรียนรัฐบาล มีอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อปีน้อยกว่าโรงเรียนเอกชน 3.76 คะแนนต่อปี

กำหนดค่าของแต่ละตัวแปรในปฏิสัมพันธ์ ไว้สำหรับตรวจสอบปฏิสัมพันธ์

```
> publicval <- c(0, 1)
> yearval <- c(0, 1, 2)
```

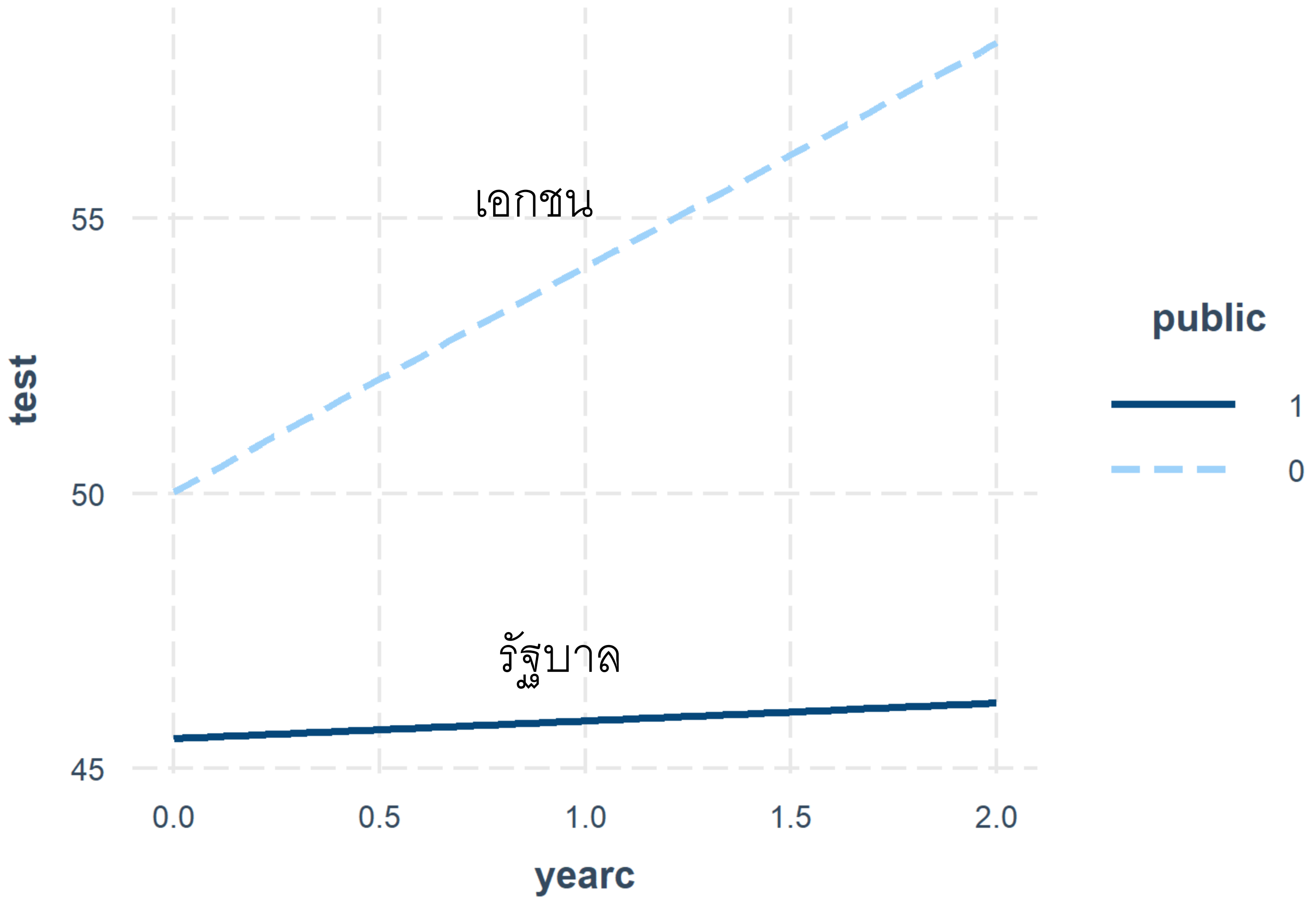
```
> quick_sim_slopes(model=m24, pred="yearc", modx="public", modx.values=publicval)
$`Conditional Intercept`
  modx.values      est        se        z p
1           0 50.03721 0.7090314 70.57121 0
2           1 45.54299 0.7083046 64.29859 0

$`Conditional Slope`
  modx.values       est        se          z        p
1           0 4.0803648 0.3910467 10.4344705 0.000000
2           1 0.3228416 0.3907220  0.8262693 0.408651
```

ประเภท	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	*SE*	*Z*	*b*	*SE*	*z*
รัฐบาล	45.55	0.71	64.30**	0.32	0.39	0.83
เอกชน	50.04	0.71	70.57**	4.08	0.39	10.43**

โรงเรียนรัฐบาล การเปลี่ยนแปลงคะแนนสอบเพิ่มขึ้นปีละ 0.32 คะแนน แต่การเพิ่มนั้นไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

โรงเรียนเอกชน การเปลี่ยนแปลงคะแนนสอบเพิ่มขึ้นปีละ 4.08 คะแนน ซึ่งถึงระดับนัยสำคัญ

```
> interact_plot(model=m24, pred="yearc", modx="public", modx.values=publicval)
```



```
> quick_sim_slopes(model=m24, pred="public", modx="yearc", modx.values=yearval)
$`Conditional Intercept`
  modx.values      est        se        z p
1           0 50.03721 0.7090314 70.57121 0
2           1 54.11757 0.6912191 78.29293 0
3           2 58.19794 0.8710208 66.81578 0

$`Conditional Slope`
  modx.values        est        se         z     p
1           0  -4.494218 1.0022081 -4.484317 7e-06
2           1  -8.251742 0.9774164 -8.442402 0e+00
3           2 -12.009265 1.2318388 -9.749055 0e+00
```

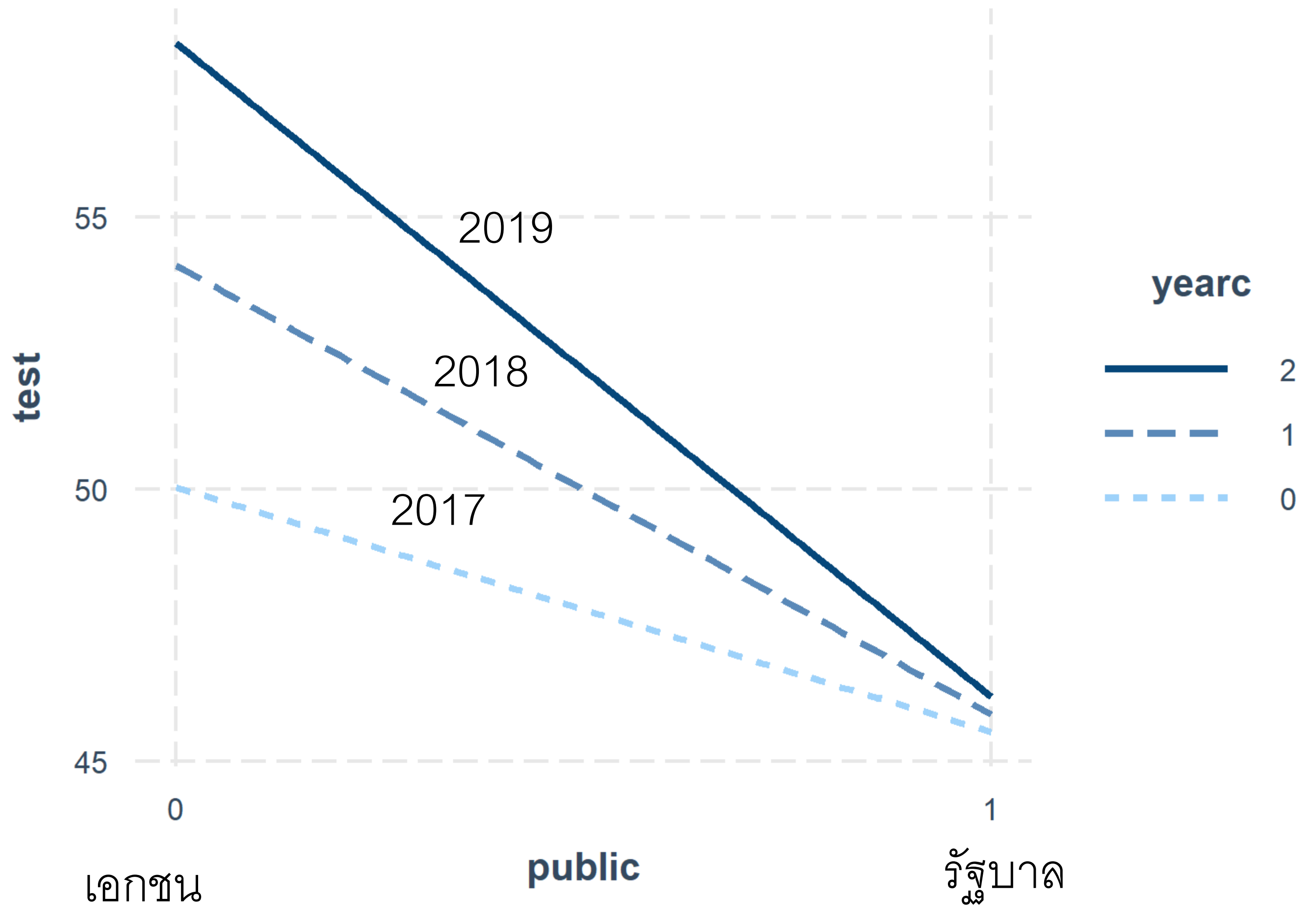
ปี	จุดตัดแบบง่าย			ความชันแบบง่าย		
	b	*SE*	*Z*	*b*	*SE*	*z*
2017	50.04	0.71	70.57**	-4.49	1.00	-4.48**
2018	54.12	0.69	78.29**	-8.25	0.98	-8.44**
2019	58.20	0.87	66.82**	-12.01	1.23	-9.75**

โรงเรียนเอกชน มีคะแนนสอบสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาล 4.49 คะแนน ในปี 2017

โรงเรียนเอกชน มีคะแนนสอบสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาล 8.25 คะแนน ในปี 2018

โรงเรียนเอกชน มีคะแนนสอบสูงกว่าโรงเรียนรัฐบาล 12.01 คะแนน ในปี 2019

```
> interact_plot(model=m24, pred="public", modx="yearc", modx.values=yearval)
```



โมเดลระยะยาว

- ในตัวอย่างที่ผ่านมา การเปลี่ยนแปลงจะเกิดในระดับกลุ่ม ไม่ใช่ระดับบุคคล เช่น
  - ทัศนคติของนักเรียนในโรงเรียนเปลี่ยนแปลงไปหรือไม่
  - ความพึงพอใจของลูกค้าในแต่ละไตรมาสเปลี่ยนแปลงไปหรือไม่
- การวัดความเปลี่ยนแปลงนี้ จะเหมาะสมในกรณีที่ผู้วิจัยไม่สามารถเก็บข้อมูลจากตัวอย่างเดิมได้ เพราะลูกค้าที่มาแต่ละครั้งส่วนใหญ่ไม่ใช้คนเดิม หรือแม้สามารถเก็บบุคคลเดิมได้ แต่การเก็บข้อมูลโดยไม่สนบุคคล จะง่ายและประหยัดกว่ามาก

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- การหาสัมประสิทธิ์การทำนายในโมเดล 3 ระดับ มีหลักการคล้ายคลึงกับโมเดล 2 ระดับ (Rights & Sterba, 2022) โดยแบ่งเป็น
  - กรณีที่ตัวแปรทั้งหมดย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
  - กรณีที่ตัวแปรบางตัวไม่ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
- ให้ X_{ijk}, W_{jk}, V_k เป็นตัวแปรอิสระทำนาย Y_{ijk} โดยตัวแปรอิสระทั้งหมดย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม และให้มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างชั้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด จะได้โมเดลดังนี้

ระดับที่ 1 $$Y_{ijk} = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + e_{ijk}$$

ระดับที่ 2 $$\beta_{0jk} = \pi_{00k} + \pi_{01k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + \pi_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + r_{0jk}$$

$$\beta_{1jk} = \pi_{10k} + \pi_{11k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + \pi_{12k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k}) + r_{1jk}$$

ระดับที่ 3 $$\pi_{00k} = \gamma_{000} + \gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{002}\bar{W}_{.k} + \gamma_{003}V_k + u_{00k}$$

$$\pi_{01k} = \gamma_{010} + \gamma_{011}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{012}\bar{W}_{.k} + \gamma_{013}V_k + u_{01k}$$

$$\pi_{02k} = \gamma_{020} + \gamma_{021}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{022}\bar{W}_{.k} + \gamma_{023}V_k + u_{02k}$$

$$\pi_{10k} = \gamma_{100} + \gamma_{101}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{102}\bar{W}_{.k} + \gamma_{103}V_k + u_{10k}$$

$$\pi_{11k} = \gamma_{110} + \gamma_{111}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{112}\bar{W}_{.k} + \gamma_{113}V_k + u_{11k}$$

$$\pi_{12k} = \gamma_{120} + \gamma_{121}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{122}\bar{W}_{.k} + \gamma_{123}V_k + u_{12k}$$

จากชุดสมการนี้ จะสามารถสร้างสมการรวมได้ดังต่อไปนี้

$$Y_{ijk} = \gamma_{000} + \gamma_{100}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})$$
$$+\gamma_{110}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + \gamma_{120}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(W_{jk} - \bar{W}_{.k})$$
$$+\gamma_{101}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{102}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})\bar{W}_{.k} + \gamma_{103}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})V_k$$
$$+\gamma_{111}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{112}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})\bar{W}_{.k}$$
$$+\gamma_{113}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})V_k + \gamma_{121}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(W_{jk} - \bar{W}_{.k})\bar{\bar{X}}_{.k}$$
$$+\gamma_{122}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(W_{jk} - \bar{W}_{.k})\bar{W}_{.k} + \gamma_{123}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(W_{jk} - \bar{W}_{.k})V_k$$

Fixed Effect ตัวแปรระดับที่ 1

$$+\gamma_{010}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + \gamma_{020}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})$$
$$+\gamma_{011}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{012}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})\bar{W}_{.k} + \gamma_{013}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k})V_k$$
$$+\gamma_{021}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{022}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})\bar{W}_{.k} + \gamma_{023}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})V_k$$

Fixed Effect ตัวแปรระดับที่ 2

$$+\gamma_{001}\bar{\bar{X}}_{.k} + \gamma_{002}\bar{W}_{.k} + \gamma_{003}V_k$$

Fixed Effect ตัวแปรระดับที่ 3

$$+r_{1jk}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})$$

Random Effect ตัวแปรระดับที่ 1 ที่แปรผันในระดับที่ 2

$$+u_{10k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk}) + u_{11k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + u_{12k}(X_{ijk} - \bar{X}_{.jk})(W_{jk} - \bar{W}_{.k})$$

Random Effect ตัวแปรระดับที่ 1 ที่แปรผันในระดับที่ 3

$$+u_{01k}(\bar{X}_{.jk} - \bar{\bar{X}}_{.k}) + u_{02k}(W_{jk} - \bar{W}_{.k})$$

Random Effect ตัวแปรระดับที่ 2 ที่แปรผันในระดับที่ 3

$$+u_{00k} + r_{0jk} + e_{ijk}$$

Random Effect ของจุดตัด และค่าคงเหลือ

จากสมการข้างต้น ความแปรปรวนของ Y_{ijk} สามารถแบ่งได้ดังนี้

$$Var(Y_{ijk}) = f_1 + f_2 + f_3 + v_{1*2} + v_{1*3} + v_{2*3} + m_3 + m_2 + e$$

1. f_1 คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร
2. f_2 คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร
3. f_3 คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 3 ผ่านความชันถาวร
4. v_{1*2} คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ที่ความชันสุ่มให้แตกต่างกันในหน่วยตัวอย่างระดับที่ 2
5. v_{1*3} คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ที่ความชันสุ่มให้แตกต่างกันในตัวอย่างระดับที่ 3
6. v_{2*3} คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ที่ความชันสุ่มให้แตกต่างกันในตัวอย่างระดับที่ 3
7. m_3 คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยการเป็นสมาชิกหน่วยตัวอย่างระดับที่ 3 ที่ตัวแปรต้นไม่สามารถอธิบายได้
8. m_2 คือ ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยการเป็นสมาชิกหน่วยตัวอย่างระดับที่ 2 ที่ตัวแปรต้นไม่สามารถอธิบายได้
9. e คือ ความแปรปรวนของตัวแปรตามระดับที่ 1 ที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยแหล่งใดๆ ในสมการ

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ความแปรปรวนสามารถแบ่งเป็นชุดตามตารางนี้

แหล่งความแปรปรวน	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
อิทธิพลตัวแปรต้นผ่านความชันคงที่ (f)	f_1	f_2	f_3
อิทธิพลตัวแปรต้นผ่านความชันสุ่ม (v)	v_{1*2}, v_{1*3}	v_{2*3}	
ความแปรปรวนการเป็นสมาชิกกลุ่ม (m)		m_2	m_3
ค่าคงเหลือ (e)	e		

- สามารถสร้างสัมประสิทธิ์การทำนาย ตามเศษและส่วนที่นักวิเคราะห์ต้องการได้ดังนี้

$$R_{?}^{2(?)}$$

$2(?)$ ← ความแปรปรวนที่อธิบายได้

$?$ ← ความแปรปรวนที่ต้องการอธิบาย

สัมประสิทธิ์การทำนาย

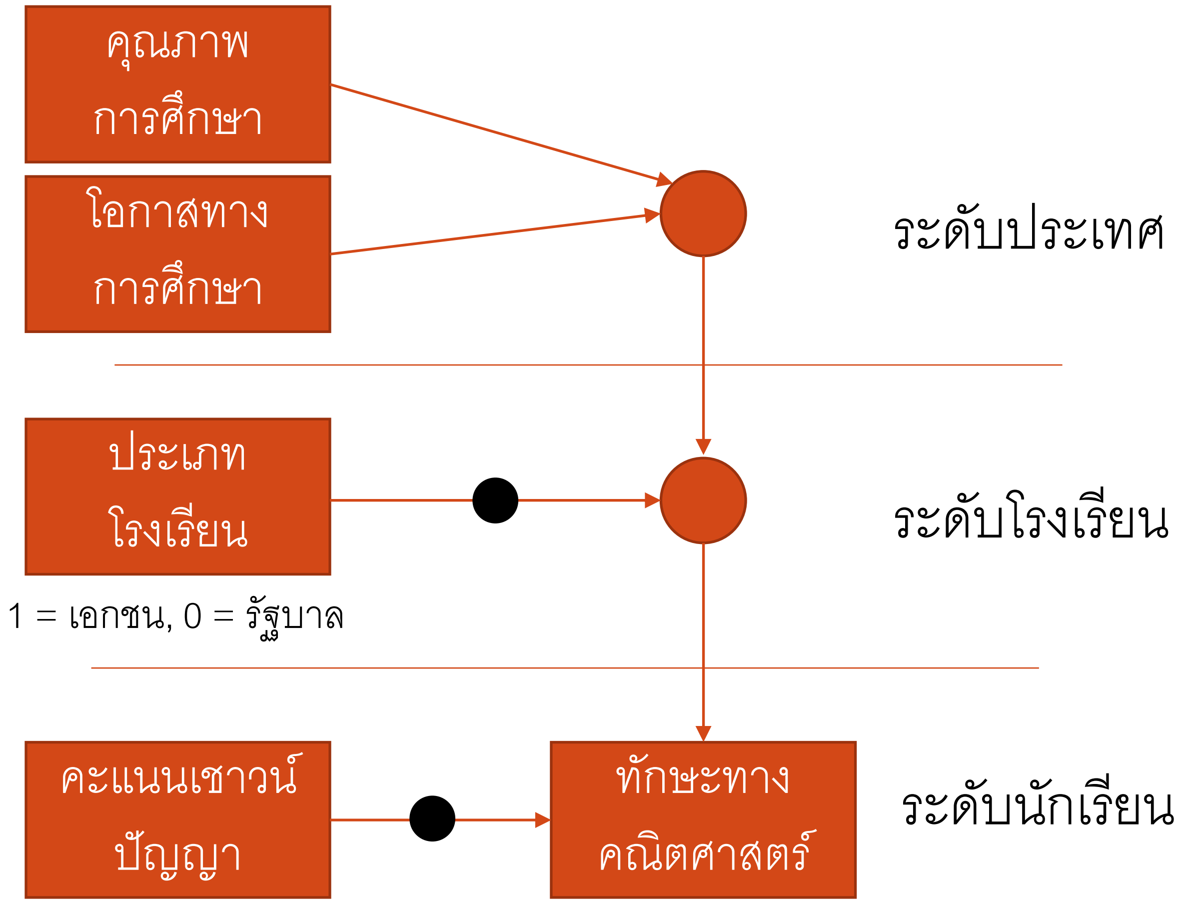
- $R_t^{2(f)} = \frac{f}{f+v+m+e}$ (Marginal Total R^2) มองว่าความชันสุ่มกำหนดไม่ได้ ความแปรปรวนคงเหลือแต่ละระดับไม่ใช่สิ่งที่สนใจ
- $R_t^{2(fv)} = \frac{f+v}{f+v+m+e}$ มองว่าความชันสุ่มเป็นสิ่งที่กำหนดได้และสนใจ ความแปรปรวนคงเหลือแต่ละระดับไม่ใช่สิ่งที่สนใจ
- $R_t^{2(fvm)} = \frac{f+v+m}{f+v+m+e}$ (Conditional Total R^2) มองว่าการเป็นสมาชิกกลุ่มสามารถกำหนดได้และเป็นสิ่งที่สนใจ

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- $R_1^{2(f_1)}, R_2^{2(f_2)}, R_3^{2(f_3)}$ สัดส่วนที่ตัวแปรอิสระสามารถอธิบายได้ในแต่ละระดับด้วยความชันคงที่
- $R_1^{2(f_1 v_1)}$ สัดส่วนที่ตัวแปรอิสระระดับนักเรียนสามารถทำนายตัวแปรตามภายในแต่ละห้องเรียน เทียบเคียงกับการเก็บข้อมูลจากห้องเรียนเดียว
- $R_{12}^{2(f_1 f_2 v_1 v_2)}$ สัดส่วนที่ตัวแปรอิสระระดับนักเรียนและห้องเรียนสามารถทำนายตัวแปรตามภายในแต่ละโรงเรียนได้ เทียบเคียงกับการเก็บข้อมูลจากโรงเรียนเดียว

สัมประสิทธิ์การทำนาย

ทดสอบความชันสุ่มของ
คะแนนเชาวน์ปัญญาและ
ประเภทโรงเรียน



โมเดลที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์การทำนาย

```
> m20 <- lmer(math ~ 1 + diffschooliqc + diffcountryiqc + avecountryiqcc
+             + diffprivate + aveprivatec
+             + qualityc + opportunityc
+             + diffschooliqc*diffcountryiqc + diffschooliqc*avecountryiqcc
+             + diffschooliqc*diffprivate + diffschooliqc*aveprivatec
+             + diffschooliqc*qualityc + diffschooliqc*opportunityc
+             + diffprivate*avecountryiqcc + diffprivate*aveprivatec
+             + diffprivate*qualityc + diffprivate*opportunityc
+             + (1|schoolid) + (1 + diffschooliqc + diffprivate|countryid), data=dat1, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> dat1_1 <- model.matrix(m20)
> sumoutm20 <- summary(m20)
```

คำสั่ง model.matrix เป็นคำสั่งสร้างข้อมูลขึ้นมาใหม่ตามการคำนวณในสูตรข้างบน

เก็บผลลัพธ์ของคำสั่ง summary

จากคอลัมน์ของ dat1_1 นำตัวแปรมาจัดกลุ่มตามข้อมูลตามระดับของตัวแปร

```
> lv1_covs <- c("diffschooliqc", "diffschooliqc:diffcountryiqc",
+               "diffschooliqc:I(avecountryiqc + 0.691)",
+               "diffschooliqc:diffprivate",
+               "diffschooliqc:I(aveprivate - 0.506)",
+               "diffschooliqc:I(quality - 53.33)",
+               "diffschooliqc:I(opportunity - 47.98)")
> lv2_covs <- c("diffschooliqc", "diffprivate",
+               "I(avecountryiqc + 0.691):diffprivate",
+               "diffprivate:I(aveprivate - 0.506)",
+               "diffprivate:I(quality - 53.33)",
+               "diffprivate:I(opportunity - 47.98)")
> lv3_covs <- c("I(avecountryiqc + 0.691)", "I(aveprivate - 0.506)",
+               "I(quality - 53.33)", "I(opportunity - 47.98)")
+
```

หาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม

```
> ranefvar18 <- as.matrix(Matrix::bdiag(VarCorr(m18)))
```

ลงข้อมูลในฟังก์ชั่น

```
> r2mlm3_manual(data=dat1_1,
+               l1_covs=lv1_covs,
+               l2_covs=lv2_covs,
+               l3_covs=lv3_covs,
+               random_covs12 = NULL,
+               random_covs13 = "diffschooliqc",
+               random_covs23 = "diffprivate",
+               gamma_1 = coef(sumoutm20)[lv1_covs, "Estimate"],
+               gamma_2 = coef(sumoutm20)[lv2_covs, "Estimate"],
+               gamma_3 = coef(sumoutm20)[lv3_covs, "Estimate"],
+               Tau12 = ranefvar20[1, 1, drop=FALSE],
+               Tau13 = ranefvar20[2:3, 2:3, drop=FALSE],
+               Tau23 = ranefvar20[c(2,4), c(2,4), drop=FALSE],
+               sigma2=getME(m20, "sigma")^2,
+               clustermeancentered = TRUE)
```

ใส่ข้อมูลที่ได้จาก model.matrix

ใส่ตัวแปรแต่ละระดับ

ใส่ตัวแปรที่มีความชันสุ่มในแต่ละระดับ

ใส่อิทธิพลคงที่

นำเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่มมาแยกใส่

ตัวแปรทั้งหมดย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ย

```
$R2s
    total              l1                  l2                 l3
f1  0.00370730759138626 0.00598685430642858 NA                 NA
f2  0.221846118315964   NA                  0.595235164131331  NA
f3  0.00502179082505503 NA                  NA                 0.623409759395563
v12 0                   0                   NA                 NA
v13 0.00044510720801166 0.000718794418703892 NA                NA
v23 0.00286630638688417 NA                  0.00769058465209534 NA
m2  0.147990889355756   NA                  0.397074251216574  NA
m3  0.00303357043512798 NA                  NA                 0.376590240604437
```

$$R_t^{2(f)} = .004 + .222 + .005 = 23\%$$

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบถาวร

สามารถอธิบายความแปรปรวนได้ 23%

	1	2	3
f	0.4%	22.2%	0.5%
v	0% (1*2), 0.04% (1*3)	0.3%	
m		14.8%	0.3%

$$R_3^{2(f_3)} = 62\%$$

ตัวแปรต้นระดับประเทศทั้งหมดสามารถอธิบายความแปรปรวนของคะแนนสอบ

คณิตศาสตร์ระดับประเทศได้ 62%

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- หากตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ความแปรปรวนของ Y_{ijk} สามารถแบ่งได้ดังนี้

$$\boxed{Var(Y_{ijk}) = f_1 + f_2 + f_3 + v_{1*2} + \boldsymbol{v_{2*2}} + v_{1*3} + v_{2*3} + \boldsymbol{v_{3*3}} + m_3 + m_2 + \sigma^2}$$

แหล่งความแปรปรวน	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
อิทธิพลตัวแปรต้นผ่านความชันคงที่ (f)	f_1	f_2	f_3
อิทธิพลตัวแปรต้นผ่านความชันสุ่ม (v)	v_{1*2}, v_{1*3}	$\boldsymbol{v_{2*2}}, v_{2*3}$	$\boldsymbol{v_{3*3}}$
ความแปรปรวนการเป็นสมาชิกกลุ่ม (m)		m_2	m_3
ค่าคงเหลือ (e)	e		

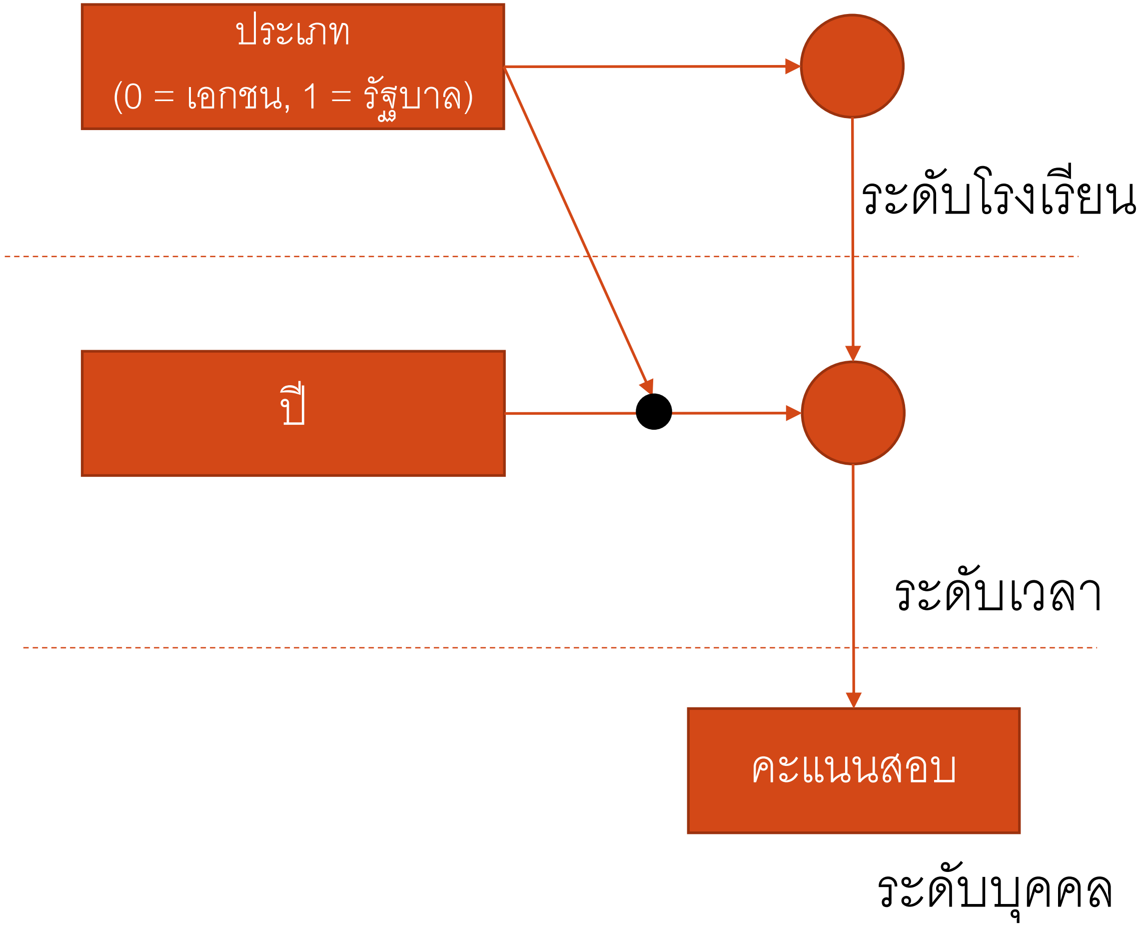
สัมประสิทธิ์การทำนาย

- เมื่อตัวแปรไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ทำให้ตัวแปรระดับที่ 1 ที่มีความชันสุ่ม ไปส่งผลให้เกิดความเปลี่ยนแปลงในระดับที่ 2 และ 3 ด้วย และตัวแปรระดับที่ 2 ที่มีความชันสุ่ม ไปส่งผลให้เกิดความเปลี่ยนแปลงในระดับที่ 3 ด้วย
- v_{2*2} และ v_{3*3} จึงแสดงว่าปรากฏการณ์ข้างบน สามารถอธิบายความแปรปรวนในระดับที่ 2 และ 3 ตามลำดับได้มากน้อยเพียงใด

สัมประสิทธิ์การทำนาย

ต้องการทดสอบการเปลี่ยนแปลงคะแนนสอบมาตรฐานในช่วง 3 ปี ของ 100 โรงเรียน

เก็บข้อมูลจากนักเรียนปี 2017, 2018, 2019 โดยไม่ได้ติดตามข้อมูลจากนักเรียนคนเดียวกัน แต่ติดตามข้อมูลจากโรงเรียนเดียวกัน



โมเดลที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์การทำนาย

คำสั่ง model.matrix เป็นคำสั่งสร้างข้อมูลขึ้นมาใหม่ตามการคำนวณในสูตรข้างบน

```
> m24 <- lmer(test ~ 1 + yearc*public + (1|timeid) + (1 + yearc|schoolid),
+             data=dat2, REML=FALSE,
+             control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
>
> dat2_1 <- model.matrix(m24)
> varnames <- colnames(dat2_1)
> dat2_1 <- data.frame(dat2_1, timeid = dat2$timeid,schoolid = dat2$schoolid)
> colnames(dat2_1)[1:length(varnames)] <- varnames
>
> sumoutm24 <- summary(m24)
>
> lv2_covs <- c("yearc", "yearc:public")
> lv3_covs <- c("public")
>
> ranefvar24 <- as.matrix(Matrix::bdiag(VarCorr(m24)))
```

บันทึกชื่อคอลัมน์ไว้

แนบตัวแปร ID ระดับที่ 2 และ 3

เปลี่ยนชื่อตัวแปรให้เป็นแบบเดิม

เก็บผลลัพธ์ของคำสั่ง summary

จากคอลัมน์ของ dat2_1 นำตัวแปรมาจัดกลุ่มตามข้อมูลตามระดับของตัวแปร

หาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม

ลงข้อมูลในฟังก์ชั่น

```
> r2mlm3_manual(data=dat2_1,
+               l1_covs=NULL,
+               l2_covs=lv2_covs,
+               l3_covs=lv3_covs,
+               random_covs12 = NULL,
+               random_covs13 = NULL,
+               random_covs23 = "yearc",
+               gamma_1 = NULL,
+               gamma_2 = coef(sumoutm24)[lv2_covs, "Estimate"],
+               gamma_3 = coef(sumoutm24)[lv3_covs, "Estimate"],
+               Tau2_noncmc = ranefvar24[1, 1,drop=FALSE],
+               Tau3_noncmc = ranefvar24[2:3, 2:3, drop=FALSE],
+               sigma2=getME(m24, "sigma")^2,
+               l2clusterID_noncmc = "timeid",
+               l3clusterID_noncmc = "schoolid",
+               clustermeancentered = FALSE)
```

ใส่ข้อมูลที่ได้จาก `model.matrix` และแนบ ID

ใส่ตัวแปรแต่ละระดับ

ใส่ตัวแปรที่มีความชันสุ่มในแต่ละระดับ

ใส่อิทธิพลคงที่

นำเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่มมาแยกใส่

ชื่อตัวแปรที่แสดง ID ระดับที่ 2 และ 3

มีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง ที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ย

ถ้า `clustermeancentered = FALSE` จะใส่ข้อมูลลงใน `Tau2_noncmc` และ `Tau3_noncmc` แทนที่จะใส่ลง `Tau12`, `Tau13`, และ `Tau23` เหมือนกรณี `clustermeancentered = TRUE`

```
$R2s
    total               l1 l2                l3
f1  0                   0  NA                NA
f2  0.0537897645769702  NA 0.35194693511427  NA
f3  0.175673051270114   NA NA                0.454598473904689
v12 0                   0  NA                NA
v13 0                   0  NA                NA
v22 0                   NA 0                 NA
v23 0.0226818108186822  NA 0.148407301338044 NA
v32 0                   NA NA                0
v33 0.00027782788962759 NA NA                0.000718949966528634
m2  0.0763632960303646  NA 0.499645763547685 NA
m3  0.210484758781374   NA NA                0.5446825761
```

	1	2	3
f	0%	5.4%	17.6%
v	0% (1*2), 0% (1*3)	0.3% (2*2), 2.3% (2*3)	0.02%
m		7.6%	21%

$$R_t^{2(f)} = .00 + .054 + .176 = 23\%$$

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบถาวร
สามารถอธิบายความแปรปรวนได้ 23%

$$R_t^{2(fv)} = 26\%$$

ตัวแปรเวลาและประเภทของโรงเรียน สามารถอธิบายความแปรปรวนระดับนักเรียน
ทั้งรูปแบบความชันคงที่และความชันสุ่มได้ 26%

คาบต่อไป

- การจัดการข้อมูลสูญหาย