การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ในการวิเคราะห์ถดถอย

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

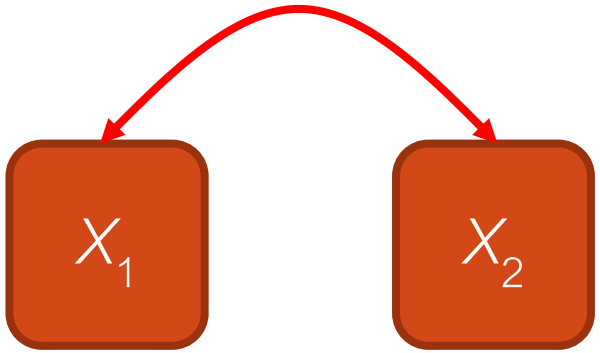
โครงร่างการนำเสนอ

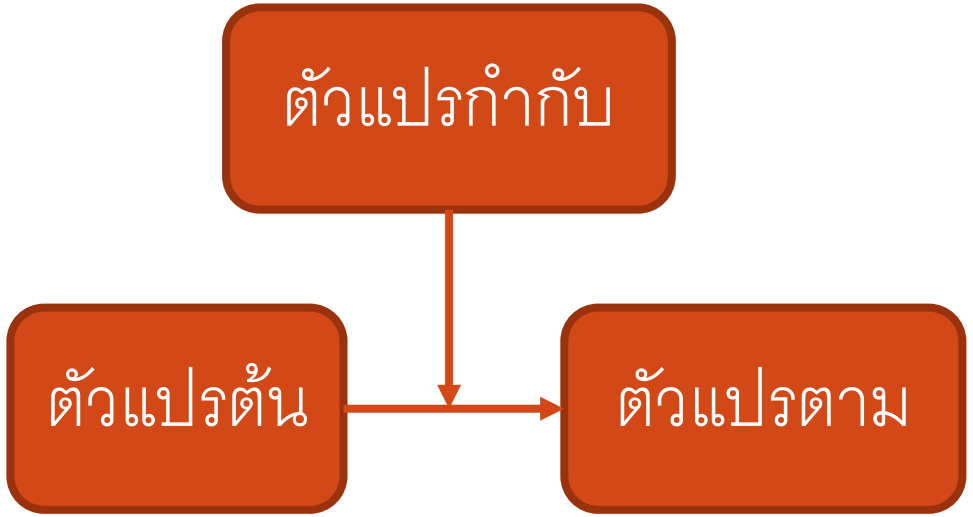
- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง
- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรกลุ่ม
- การเปลี่ยนแปลงแบบพหุนาม
- ข้อตกลงเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติ

ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- ตัวแปรกำกับ (Moderator) คือ ตัวแปรที่ปรับขนาดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอื่นๆ หรือปรับขนาดอิทธิพลของตัวแปรต้นไปหาตัวแปรตาม

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสอง
ขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรกำกับ

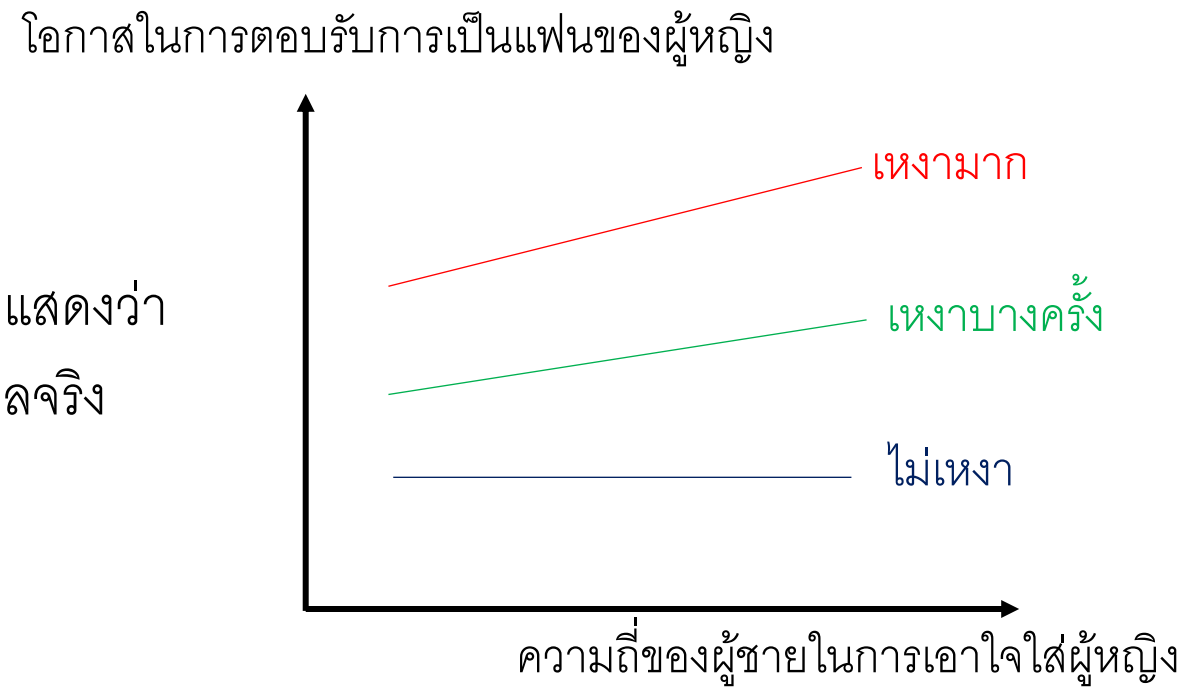




ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- เช่น อิทธิพลของความถี่ของผู้ชายในการเอาใจใส่ผู้หญิงมีผลทางบวกต่อโอกาสในการตอบรับการเป็นแฟนของผู้หญิง แต่ขนาดอิทธิพลนี้ขึ้นอยู่กับความเหงาของผู้หญิง

เส้นไม่ขนานกัน แสดงว่าตัวแปรกำกับมีผลจริง

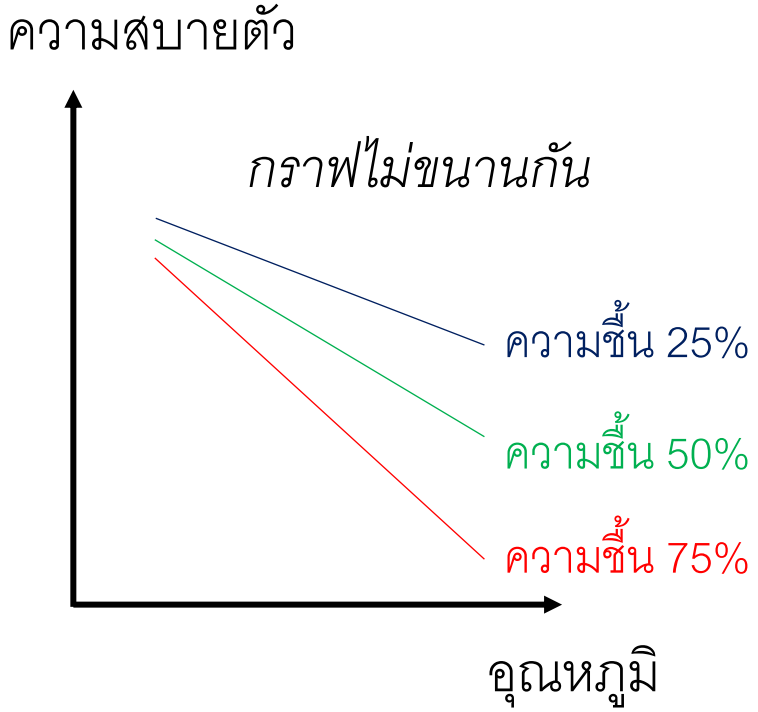


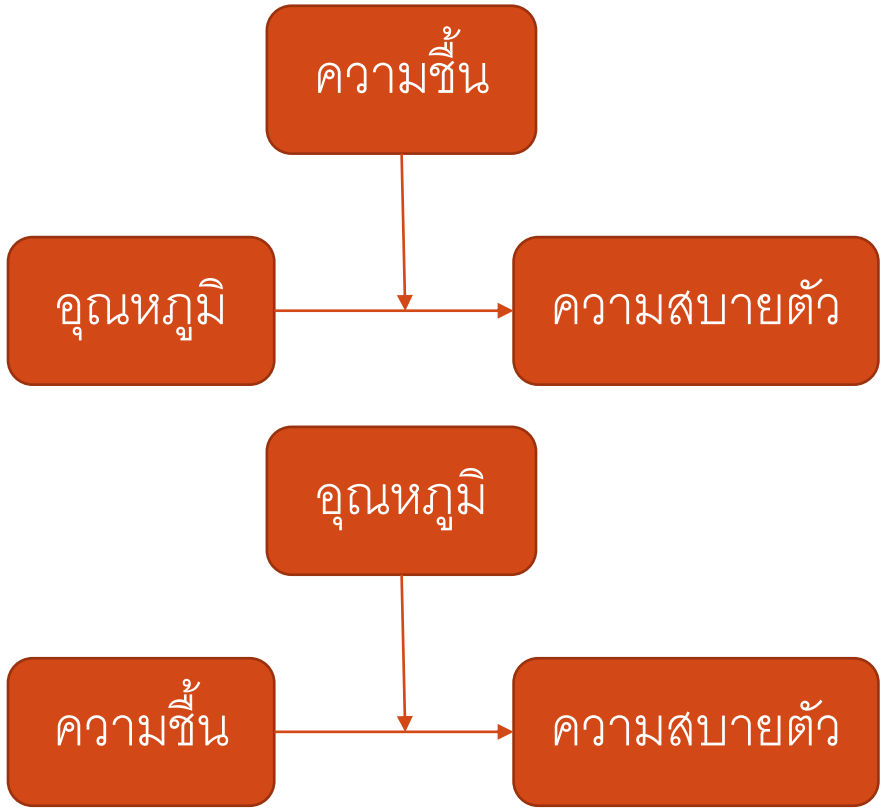
ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- สังเกตว่า ตัวแปรกำกับนี้ก็คืออีกชื่อหนึ่งของผลปฏิสัมพันธ์หรืออิทธิพลร่วม (Interaction effect)
- กล่าวคือ ตัวแปรกำกับและปฏิสัมพันธ์คือเรื่องเดียวกัน
- แต่ถ้าหากนักวิจัยมีปัจจัยที่สนใจเป็นหลัก ตัวแปรนั้นจะจัดให้เป็นตัวแปรต้น และตัวแปรที่ไม่ได้สนใจโดยตรง แต่มาปรับอิทธิพลของตัวแปรต้น จะเรียกว่าตัวแปรกำกับ
- ในทางสถิติ การเลือกตัวใดเป็นตัวแปรต้นหรือตัวแปรกำกับไม่มีผลกับการวิเคราะห์ แต่มีผลต่อการตีความหมาย

ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- อีกตัวอย่างหนึ่ง อุณหภูมิและความชื้นมีผลร่วมกันต่อความสบายตัว





ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- หากตัวแปรต้นและตัวแปรกำกับ อยู่ในรูปของตัวแปรแบบจัดกลุ่ม การทดสอบ Two-way Factorial ANOVA จะเป็นวิธีการที่เหมาะสม (จริงๆ วิเคราะห์ด้วยการวิเคราะห์ถดถอยได้)
- แต่หากตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง อยู่ในรูปของตัวแปรต่อเนื่อง การทดสอบตัวแปรกำกับ (หรือผลปฏิสัมพันธ์) จะทดสอบผ่านการวิเคราะห์ถดถอย

ปฏิสัมพันธ์หรือตัวแปรกำกับ

- ในการทดสอบ Two-way Factorial ANOVA จะมีการทดสอบอิทธิพลหลักแยกย่อย (Simple Main Effects) ซึ่งก็คือ การทดสอบผลของตัวแปรต้นต่อตัวแปรตาม ในแต่ละค่าของตัวแปรกำกับ
- ในบทนี้ จะมีการทดสอบความชันย่อย (Simple Slope) ซึ่งก็คือผลของตัวแปรต้นต่อตัวแปรตาม ในแต่ละค่าของตัวแปรกำกับเช่นเดียวกัน
- การทดสอบความชันย่อย เป็นการตีความหมายผลปฏิสัมพันธ์ ในบางครั้งจะเรียกว่าการตรวจสอบปฏิสัมพันธ์ (Probing Interaction)

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ให้ X เป็นตัวแปรอิสระ และ Z เป็นตัวแปรกำกับ การวิเคราะห์ถดถอยจะเป็นดังต่อไปนี้

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2Z + b_3XZ$$

- การทดสอบว่ามีปฏิสัมพันธ์หรือไม่ สามารถทำได้ 2 วิธี คือ
  - ทดสอบว่า b_3 แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
  - ทดสอบผ่านการวิเคราะห์ถดถอยแบบลำดับขั้น ว่าหากใส่ XZ เข้าไปเพิ่มเติมจาก X และ Z แล้ว R^2 เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
- วิธีที่สองจะสามารถใช้ได้กับกรณีที่ตัวแปรปฏิสัมพันธ์มีมากกว่า 1 ตัว (เช่น ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรดัมมี่ 2 ตัวและตัวแปรต่อเนื่อง)

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- หากมีปฏิสัมพันธ์ แสดงว่าผลของ X ขึ้นอยู่กับค่าของ Z

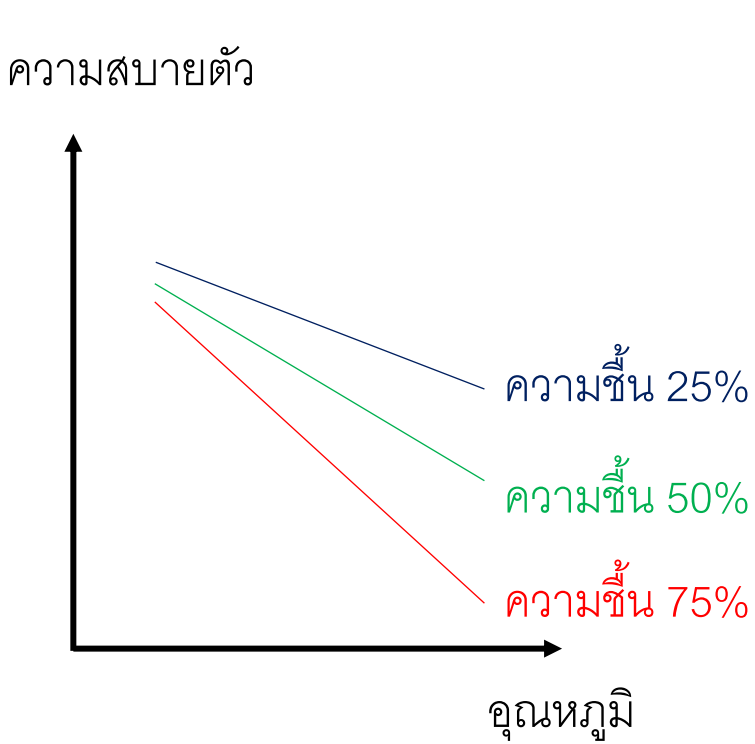
$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2Z + b_3XZ$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_2Z + (b_1 + b_3Z)X$$

- $b_0 + b_2Z$ คือจุดตัดแกน Y ที่ขึ้นอยู่กับค่าของ Z เรียกว่าจุดตัดแกน Y ย่อย (Simple Intercept)
- $b_1 + b_3Z$ คือ ความชันที่ขึ้นอยู่กับค่าของ Z เรียกว่าความชันย่อย (Simple Slope)

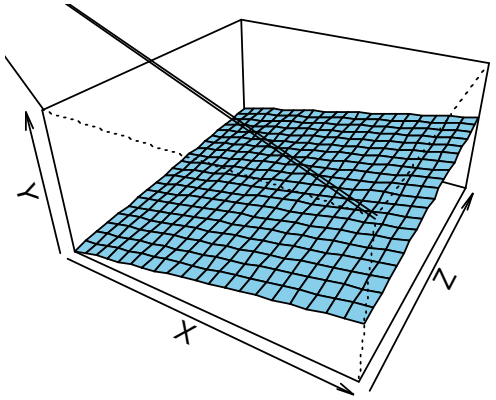
ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

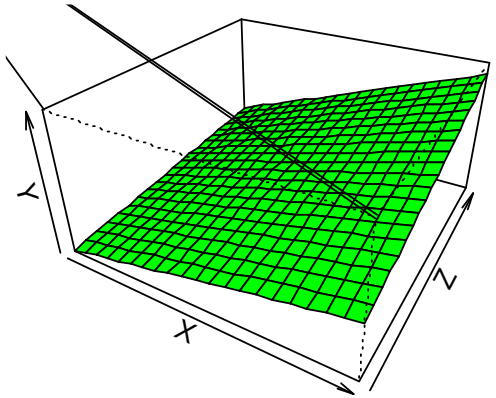
- ให้ X = อุณหภูมิ, Y = ความสบายตัว และ Z = ความชื้น

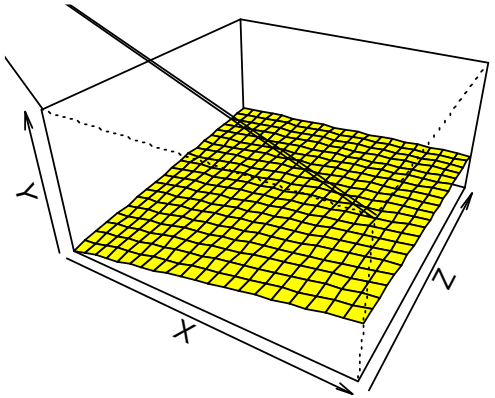


$$\hat{Y} = b_0 + b_2 Z + (b_1 + b_3 Z)X$$

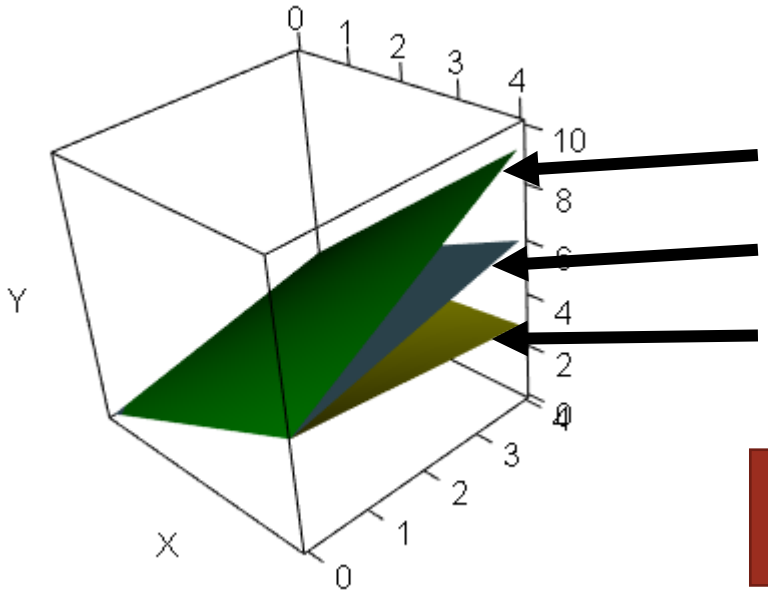
จุดตัดแกน Y	ความชัน
$\hat{Y} = b_0 + 0.25b_2$	$+ (b_1 + 0.25b_3)X$
$\hat{Y} = b_0 + 0.50b_2$	$+ (b_1 + 0.50b_3)X$
$\hat{Y} = b_0 + 0.75b_2$	$+ (b_1 + 0.75b_3)X$







$\hat{Y} = X + 0.5Z$ $\hat{Y} = X + 0.5Z + 0.2XZ$ $\hat{Y} = X + 0.5Z - 0.2XZ$

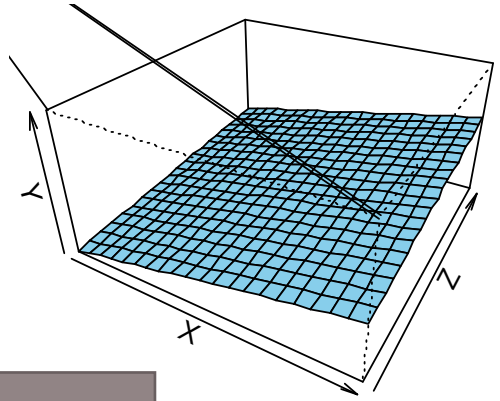


$\hat{Y} = X + 0.5Z + 0.2XZ$

$\hat{Y} = X + 0.5Z$

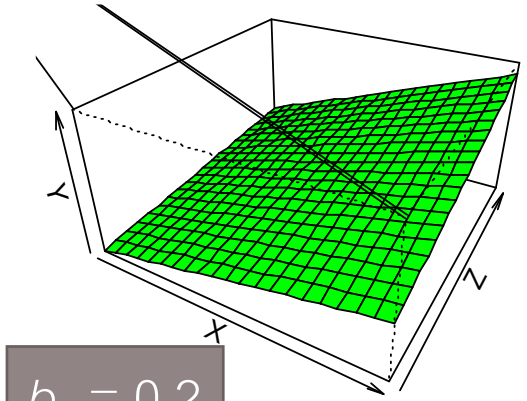
$\hat{Y} = X + 0.5Z - 0.2XZ$

สำรวจการเปลี่ยนแปลงของค่า b_3



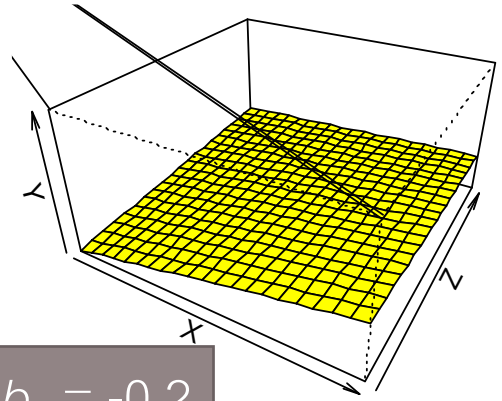
$b_3 = 0$

$$\hat{Y} = X + 0.5Z$$



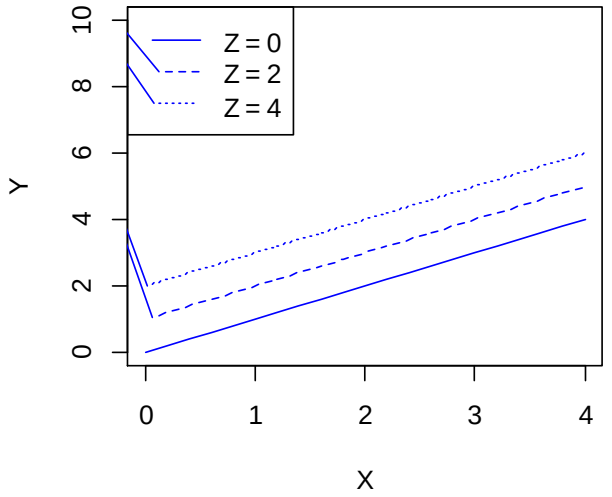
$b_3 = 0.2$

$$\hat{Y} = X + 0.5Z + 0.2XZ$$

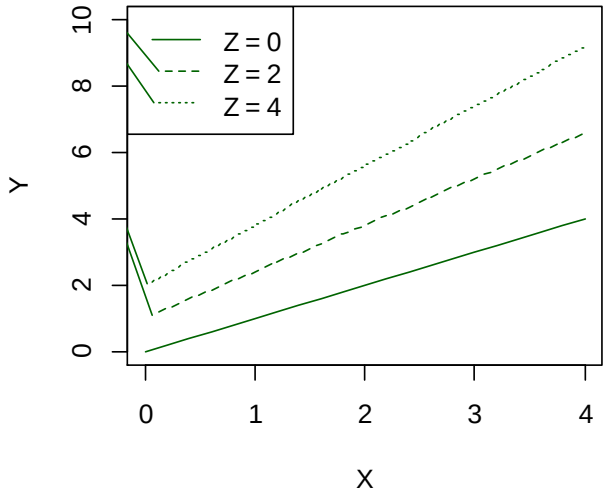


$b_3 = -0.2$

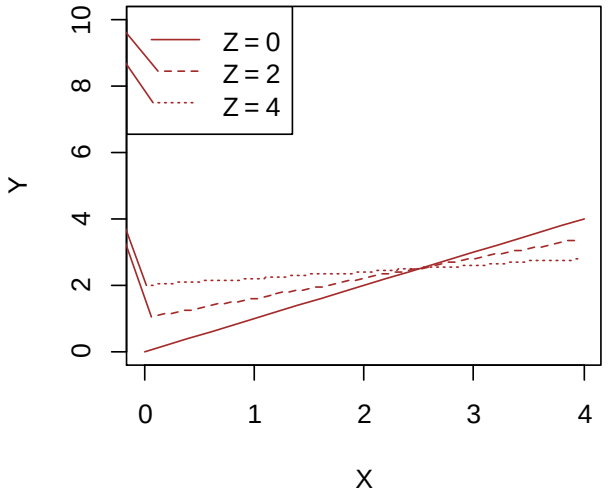
$$\hat{Y} = X + 0.5Z - 0.2XZ$$



Z เพิ่มขึ้น ความชันเท่าเดิม



Z เพิ่มขึ้น ความชันมากขึ้น



Z เพิ่มขึ้น ความชันน้อยลง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ความหมายของค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2Z + b_3XZ$$

- b_0 คือ ค่าของ Y ที่ทำนายได้เมื่อ X และ Z เท่ากับ 0
- b_1 คือ ค่าของ Y ที่เพิ่มขึ้นเมื่อ X เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและ $Z = 0$
- b_2 คือ ค่าของ Y ที่เพิ่มขึ้นเมื่อ Z เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและ $X = 0$
- b_3 คือ ค่าความชันของ X ต่อ Y ที่เปลี่ยนแปลงเมื่อ Z เพิ่มขึ้น 1 หน่วย หรือ ค่าความชันของ Z ต่อ Y ที่แปลงเมื่อ X เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- เช่นตัวอย่างเรื่องการทำนายดัชนีความรู้สึกสบายกาย เก็บข้อมูลจากคนในกรุงเทพ

$$\hat{Y} = 13 - 0.2(\text{Temp}) + 0.04(\text{Humid}) - 0.002(\text{Temp})(\text{Humid})$$

- เมื่ออุณหภูมิเท่ากับ 0 องศาเซลเซียสและความชื้นเท่ากับ 0% ความสบายกายเท่ากับ 13 คะแนน
- ความสบายกายลดลง 0.2 หน่วย เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ในกรณีที่ความชื้นเท่ากับ 0%
- ความสบายกายเพิ่มขึ้น 0.04 หน่วย เมื่อความชื้นเพิ่ม 1% ในอุณหภูมิ 0 องศา
- ค่าความชันของอุณหภูมิต่อความสบายกายลดลง 0.002 เมื่อความชื้นเพิ่มขึ้น 1% หรือค่าความชันของความชื้นต่อความสบายกายลดลง 0.002 เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 องศา

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- จะเห็นว่า b_0, b_1, b_2 จะไม่สามารถแปลความหมายได้ ถ้า X = 0 และ Z = 0 ไม่มีความหมาย
- เช่น ในกรุงเทพ ไม่เคยมีอุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส หรือความชื้น 0%
- ดังนั้น ท่านอาจย้ายศูนย์กลาง เพื่อทำให้ค่า b_0, b_1, และ b_2 มีความหมาย
- เช่น ย้ายศูนย์กลางของอุณหภูมิไปที่ 25 องศาเซลเซียส หรือความชื้นที่ 75%

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ความหมายของค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย

$$\hat{Y} = b'_0 + b'_1(X - m) + b'_2(Z - p) + b'_3(X - m)(Z - p)$$

- b'_0 คือ ค่าของ Y ที่ทำนายได้เมื่อ X และ Z เท่ากับ m และ p ตามลำดับ
- b'_1 คือ ค่าของ Y ที่เพิ่มขึ้นเมื่อ X เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและ $Z = p$
- b'_2 คือ ค่าของ Y ที่เพิ่มขึ้นเมื่อ Z เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและ $X = m$
- $b'_3 = b_3$ มีค่าเหมือนเดิม ความหมายเหมือนเดิม
- การย้ายศูนย์กลางจะไม่เปลี่ยนค่าสัมประสิทธ์ของตัวแปรกำลังสูงสุด

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ความหมายของค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย

$$\hat{Y} = b_0' + b_1'(X - m) + b_2'(Z - p) + b_3'(X - m)(Z - p)$$

- $b_0' = b_0 + b_1 m + b_2 p + b_3 mp$
- $b_1' = b_1 + b_3 p$
- $b_2' = b_2 + b_3 m$
- $b_3' = b_3$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- เช่นตัวอย่างเรื่องความรู้สึกสบายกาย วัดจากข้อมูลในกรุงเทพ

$$\hat{Y} = 7.25 - 0.35(\text{Temp} - 25) - 0.01(\text{Humid} - 75) \\ -0.002(\text{Temp} - 25)(\text{Humid} - 75).$$

- เมื่ออุณหภูมิเท่ากับ 25 องศาเซลเซียสและความชื้นเท่ากับ 75% ความสบายกายเท่ากับ 7.25 คะแนน
- ความสบายกายลดลง 0.35 หน่วย เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 หน่วย ในกรณีที่ความชื้นเท่ากับ 75%
- ความสบายกายลดลง 0.01 หน่วย เมื่อความชื้นเพิ่ม 1% ในอุณหภูมิ 25 องศา
- ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยสำหรับปฏิสัมพันธ์แปลความหมายเหมือนเดิม

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- การย้ายศูนย์กลางจะไม่มีผลกระทบต่อการทดสอบ b_3 หรือการทดสอบปฏิสัมพันธ์ด้วยการเปลี่ยนแปลงของ R^2 ค่า p จะมีค่าเหมือนเดิม
- การย้ายศูนย์กลางจะมีผลต่อค่า b_0, b_1, และ b_2 เพราะทำให้การแปลความหมายเปลี่ยนแปลงไป ค่า p จะเปลี่ยนแปลงไปด้วย
- การทดสอบ b_1 ว่าแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ จะเป็นการทดสอบความชันย่อย (Simple Slope) ว่าแตกต่าง 0 หรือไม่ เมื่อตัวแปรกำกับเท่ากับค่าที่ใช้เป็นศูนย์กลาง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

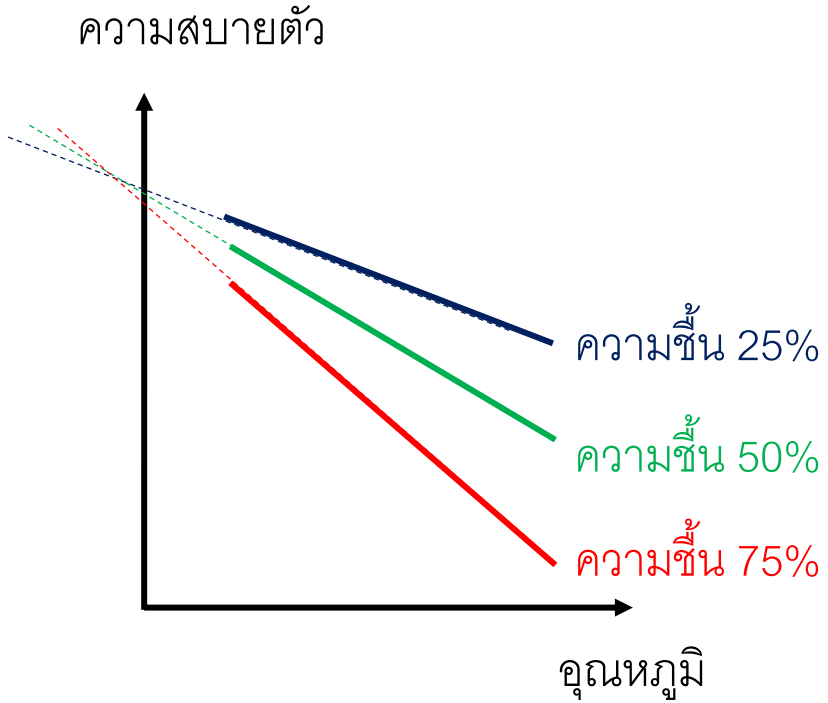
- บางครั้ง นักวิจัยจะตั้งค่าเฉลี่ยของ *X* หรือ *Z* เป็นค่าศูนย์กลาง

$$\hat{Y} = b_0' + b_1'(X - \bar{X}) + b_2'(Z - \bar{Z}) + b_3'(X - \bar{X})(Z - \bar{Z})$$

- ในที่นี้ b_1' จะมี 2 ความหมาย คือ
  - ค่าความชันของ *X* เมื่อ *Z* เท่ากับค่าเฉลี่ยของ *Z*
  - ค่าความชันของ *X* โดยเฉลี่ยจากทุกๆ ค่าของ *Z*
- ยกตัวอย่างเช่น ถ้า b_1' ในที่นี้มากกว่า 0 อย่างมีนัยสำคัญ นักวิจัยอาจแปลความหมายว่า *X* โดยเฉลี่ยมีผลทางบวกต่อ *Y*

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- นอกจากนี้หากลากเส้นออกไปเรื่อยๆ จะมีจุดหนึ่งที่เส้นทั้งหมดจะตัดกัน เรียกว่า จุดตัดกัน (Crossing Points of Simple Regression Lines)



จุดของ X ที่สมการ X ทำนาย Y ในทุกระดับของ Z ตัดกัน คือ $-b_2/b_3$

จุดของ Z ที่สมการ Z ทำนาย Y ในทุกระดับของ X ตัดกัน คือ $-b_1/b_3$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ลำดับการทดสอบสมมติฐานก็จะคล้ายกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง
- หากปฏิสัมพันธ์ถึงระดับนัยสำคัญ ให้แปลความหมายความชันย่อย ว่าตัวแปรต้นมีผลต่อตัวแปรตามอย่างไร ในแต่ละค่าของตัวแปรกำกับ และสร้างกราฟแสดงผลปฏิสัมพันธ์
- หากปฏิสัมพันธ์ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ ให้นำปฏิสัมพันธ์ออกจากสมการทำนาย แล้วแปลความหมายเหมือนการวิเคราะห์ถดถอยปกติ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- ค่าของตัวแปรกำกับที่ใช้ในการทดสอบความชันย่อย
  - $\bar{Z}, \bar{Z} - SD_Z, \bar{Z} + SD_Z$
  - 10-th, 25-th, 50-th, 75-th, และ 90-th Percentile
  - ค่าที่สนใจหากคะแนนดิบของตัวแปรกำกับมีความหมาย เช่น ความชื้นเท่ากับ 0%, 25%, 50%, 75%, และ 100%
- ในงานวิจัยทางจิตวิทยาส่วนใหญ่ จะใช้ค่าเฉลี่ยบวกลบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นค่าในการทดสอบ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ท่านต้องการตรวจสอบปฏิสัมพันธ์ระหว่างลักษณะผู้นำ การเปลี่ยนแปลงและความแน่นอนของสถานการณ์ต่อความพึงพอใจในงาน

$\alpha = .05$

ท่านจึงเก็บข้อมูลของพนักงาน ให้ประเมินลักษณะความเป็นผู้นำของหัวหน้าตนเอง และความแน่นอนของสถานการณ์ พร้อมทั้งความพึงพอใจในงาน 60 คน

สมมติฐาน คือ ลักษณะความเป็นผู้นำและความแน่นอนของสถานการณ์มีผลต่อความพึงพอใจ

H_0: ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปร

H_1: มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปร

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> ex1 <- read.table("lecture3ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> library(psych)
> describe(ex1)
          vars  n  mean    sd median trimmed   mad   min   max range
tlleader     1 60 48.90 10.96  51.03   49.61  9.63 17.31 70.75 53.44
security     2 60 51.65 10.22  52.10   51.87  9.78 28.29 76.30 48.01
jobsat       3 60 51.21 15.74  50.99   50.93 17.83 20.00 80.00 60.00
           skew kurtosis   se
tlleader -0.70     0.40 1.41
security -0.13    -0.26 1.32
jobsat    0.06    -0.89 2.03
```

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> corr.test(ex1)
Call:corr.test(x = ex1)
Correlation matrix
         tlleader security jobsat
tlleader     1.00     0.09  -0.14
security     0.09     1.00   0.57
jobsat      -0.14     0.57   1.00
Sample Size
[1] 60
Probability values (Entries above the diagonal are adjusted for multiple te
sts.)
         tlleader security jobsat
tlleader     0.00     0.58   0.58
security     0.51     0.00   0.00
jobsat       0.29     0.00   0.00

 To see confidence intervals of the correlations, print with the short=FALS
E option
```

```
> out1 <- lm(jobsat ~ tlleader + security, data=ex1)
> summary(out1)

Call:
lm(formula = jobsat ~ tlleader + security, data = ex1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-39.683  -8.821   2.048   7.479  26.441

Coe
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  17.8111    10.9031   1.634   0.1079
tlleader     -0.2724     0.1527  -1.785   0.0797 .
security      0.9045     0.1637   5.527 8.45e-07 ***
---
Sig                                    '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.8 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3613,    Adjusted R-squared:  0.3389
F-statistic: 16.12 on 2 and 57 DF,  p-value: 2.82e-06
```

$$\hat{Y} = 17.811 - 0.272(\text{TLLEADER}) + 0.904(\text{SECURITY})$$

$R^2 = .36$, $F(2, 57) = 16.12$, $p < .001$

```
> out1a <- lm(jobsat ~ tlleader*security, data=ex1)
> summary(out1a)

Call:
lm(formula = jobsat ~ tlleader * security, data = ex1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-22.9307  -8.8247   0.3722   7.6131  18.6684

Coef
                                                        )
(Intercept)       -152.11000   30.80450  -4.938 7.48e-06 ***
tlleader             3.25737    0.62576   5.205 2.86e-06 ***
security             4.19433    0.58680   7.148 1.97e-09 ***
tlleader:security   -0.06808    0.01184  -5.751 3.84e-07 ***
---
Sign                                **' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10.24 on 56 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5985,    Adjusted R-squared:  0.577
F-statistic: 27.83 on 3 and 56 DF,  p-value: 3.788e-11
```

$$\hat{Y} = -152.11 + 3.26(\text{TLLEADER}) + 4.19(\text{SECURITY}) - 0.068(\text{TLLEADER})(\text{SECURITY})$$

$R^2 = .60$, $F(2, 57) = 27.83$, $p < .001$

$$\hat{Y} = -152.11 + 3.26(\text{TLLEADER}) + 4.19(\text{SECURITY}) - 0.07(\text{TLLEADER})(\text{SECURITY})$$

เมื่อระดับผู้นำการเปลี่ยนแปลงเท่ากับ 0 และความแน่นอนของสถานการณ์เท่ากับ 0 คะแนนความพึงพอใจเท่ากับ -152.11

เมื่อความแน่นอนของสถานการณ์เท่ากับ 0 การเพิ่มขึ้นของผู้นำการเปลี่ยนแปลง 1 แต้ม ทำให้ความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 3.26 แต้ม ซึ่งแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

เมื่อระดับผู้นำการเปลี่ยนแปลงเท่ากับ 0 การเพิ่มขึ้นของความแน่นอนของสถานการณ์ 1 แต้มทำให้ความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 4.19 แต้ม ซึ่งแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

ความชันของผู้นำการเปลี่ยนแปลงต่อความพึงพอใจจะลดลง 0.07 เมื่อความแน่นอนของสถานการณ์เพิ่มขึ้น 1 แต้ม ซึ่งอิทธิพลปฏิสัมพันธ์ถึงระดับนัยสำคัญ สอดคล้องกับการทดสอบการเพิ่มขึ้นของ R^2

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> anova(out1, out1a)
Analysis of Variance Table

Model 1: jobsat ~ tlleader + security
Model 2: jobsat ~ tlleader * security
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1     57 9335.4
2     56 5868.8  1    3466.7 33.079 3.843e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

1. ลักษณะผู้นำการเปลี่ยนแปลงและความไม่แน่นอนของสถานการณ์สามารถอธิบายความแปรปรวนของความพึงพอใจของลูกน้องได้ 36%
2. เมื่อเพิ่มผลปฏิสัมพันธ์ การอธิบายความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 60% การเพิ่มขึ้นถึงระดับนัยสำคัญ, $F(1, 56) = 33.08$, $p < .001$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ท่านต้องการตรวจสอบปฏิสัมพันธ์ระหว่างลักษณะผู้นำการเปลี่ยนแปลงและความแน่นอนของสถานการณ์ต่อความพึงพอใจในงาน

คะแนนผู้นำเปลี่ยนแปลงเท่ากับ 0 และความแน่นอนของสถานการณ์เท่ากับ 0 ไม่มีความหมาย

↓

เปลี่ยนศูนย์กลางเท่ากับค่าเฉลี่ยกับตัวแปรทั้งสองตัว

```
> out1_1 <- lm(jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader)) + I(security - mean(security)), data=ex1)
> summary(out1_1)

Call:
lm(formula = jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader)) + I(security -
    mean(security)), data = ex1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-39.683  -8.821   2.048   7.479  26.441

Coefficients:
                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                    51.2075     1.6522  30.994  < 2e-16 ***
I(tlleader - mean(tlleader))  -0.2724     0.1527  -1.785   0.0797 .
I(security - mean(security))   0.9045     0.1637   5.527 8.45e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 12.8 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3613,    Adjusted R-squared:  0.3389
F-statistic: 16.12 on 2 and 57 DF,  p-value: 2.82e-06
```

เก่า $\hat{Y} = 17.811 - 0.272X + 0.904Z$

ใหม่ $\hat{Y} = 51.21 - 0.272(X - \bar{X}) + 0.904(Z - \bar{Z})$

```
> out1a_1 <- lm(jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader))*I(security - mean(security)), data=ex1)
> summary(out1a_1)

Call:
lm(formula = jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader)) * I(security -
    mean(security)), data = ex1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-22.9307  -8.8247   0.3722   7.6131  18.6684

Coefficients:
                                                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                                         51.86394    1.32653  39.097  < 2e-16 ***
I(tlleader - mean(tlleader))                        -0.25935    0.12215  -2.123   0.0382 *
I(security - mean(security))                         0.86493    0.13109   6.598 1.59e-08 ***
I(tlleader - mean(tlleader)):I(security - mean(security)) -0.06808    0.01184  -5.751 3.84e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 10.24 on 56 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5985,    Adjusted R-squared:  0.577
F-statistic: 27.83 on 3 and 56 DF,  p-value: 3.788e-11
```

เก่า $\hat{Y} = -152.11 + 3.26X + 4.19Z - 0.07XZ$

ใหม่ $\hat{Y} = 51.86 - 0.26(X - \bar{X}) + 0.87(Z - \bar{Z}) - 0.07(X - \bar{X})(Z - \bar{Z})$

$$\hat{Y} = 51.86 - 0.26(X - \bar{X}) + 0.87(Z - \bar{Z}) - 0.07(X - \bar{X})(Z - \bar{Z})$$

เมื่อระดับผู้นำการเปลี่ยนแปลงเท่ากับค่าเฉลี่ยและความแน่นอนของสถานการณ์เท่ากับค่าเฉลี่ย คะแนนความพึงพอใจเท่ากับ 51.86

เมื่อความแน่นอนของสถานการณ์เท่ากับค่าเฉลี่ย การเพิ่มขึ้นของผู้นำการเปลี่ยนแปลง 1 แต้ม ทำให้ความพึงพอใจลดลง 0.26 แต้ม ซึ่งแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

เมื่อระดับผู้นำการเปลี่ยนแปลงเท่ากับค่าเฉลี่ย การเพิ่มขึ้นของความแน่นอนของสถานการณ์ 1 แต้มทำให้ความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.87 แต้ม ซึ่งแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

การแปลความหมายของสัมประสิทธิ์ถดถอยของปฏิสัมพันธ์เหมือนเดิม

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> anova(out1_1, out1a_1)
Analysis of Variance Table

Model 1: jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader)) + I(security - mean(security))
Model 2: jobsat ~ I(tlleader - mean(tlleader)) * I(security - mean(security))
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1     57 9335.4
2     56 5868.8  1    3466.7 33.079 3.843e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ค่า R^2, การเปลี่ยนแปลงของ R^2, และการทดสอบทางสถิติเปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่มีและไม่มีปฏิสัมพันธ์ได้ผลเหมือนเดิม

สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน (Standardized Regression Coeffient) ได้โดยการแปลงค่าตัวแปรอิสระและตัวแปรตามให้เป็นคะแนนมาตรฐาน

```
> out1_2 <- lm(I(scale(jobsat)) ~ I(scale(tlleader)) + I(scale(security)), data=ex1)
> summary(out1_2)

Call:
lm(formula = I(scale(jobsat)) ~ I(scale(tlleader)) + I(scale(security)),
    data = ex1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.5212 -0.5604  0.1301  0.4752  1.6799

Coefficients:
                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          8.091e-17  1.050e-01   0.000   1.0000
I(scale(tlleader)) -1.896e-01  1.063e-01  -1.785   0.0797 .
I(scale(security))  5.873e-01  1.063e-01   5.527 8.45e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.8131 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3613,    Adjusted R-squared:  0.3389
F-statistic: 16.12 on 2 and 57 DF,  p-value: 2.82e-06
```

-.189

.587

```
> out1a_2 <- lm(I(scale(jobsat)) ~ I(scale(tlleader))*I(scale(security)), data=ex1)
> summary(out1a_2)

Call:
lm(formula = I(scale(jobsat)) ~ I(scale(tlleader)) * I(scale(security)),
    data = ex1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.45683 -0.56065  0.02365  0.48368  1.18605

Coefficients:
                                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                          0.04170    0.08428   0.495   0.6227
I(scale(tlleader))                  -0.18051    0.08501  -2.123   0.0382 *
I(scale(security))                   0.56160    0.08512   6.598 1.59e-08 ***
I(scale(tlleader)):I(scale(security)) -0.48428    0.08420  -5.751 3.84e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.6504 on 56 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5985,    Adjusted R-squared:  0.577
F-statistic: 27.83 on 3 and 56 DF,  p-value: 3.788e-11
```

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

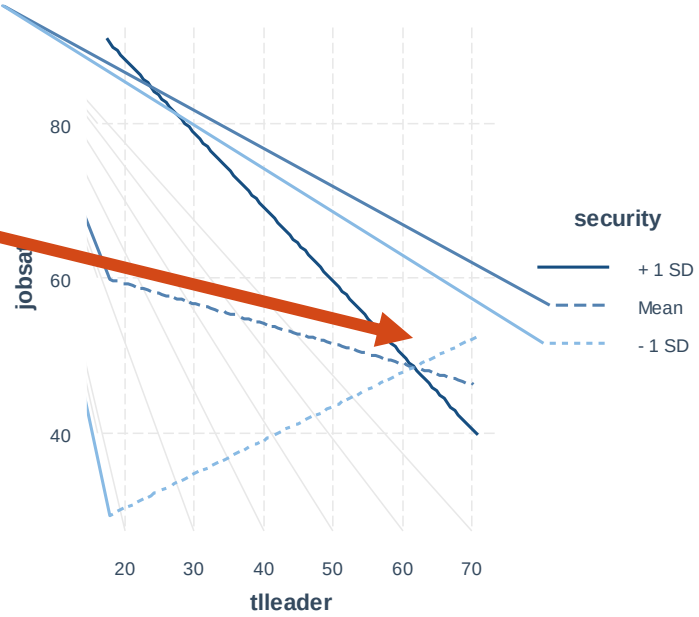
- สังเกตว่าในสมการใช้ `I(scale(tlleader))*I(scale(security))` ซึ่งเป็นการหาคะแนนมาตรฐานของตัวแปรอิสระทั้งสองก่อน ค่อยนำมาคูณกัน
- ผลลัพธ์จากการคูณ ไม่ต้องนำไปหาคะแนนมาตรฐานซ้ำอีกรอบ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> library(interactions)
> interact_plot(out1a, pred="tlleader", modx="security")
```

จุดของภาวะผู้นำเปลี่ยนแปลงที่สมการตัดกัน

คือ $\frac{-4.19}{-0.068} = 61.59$



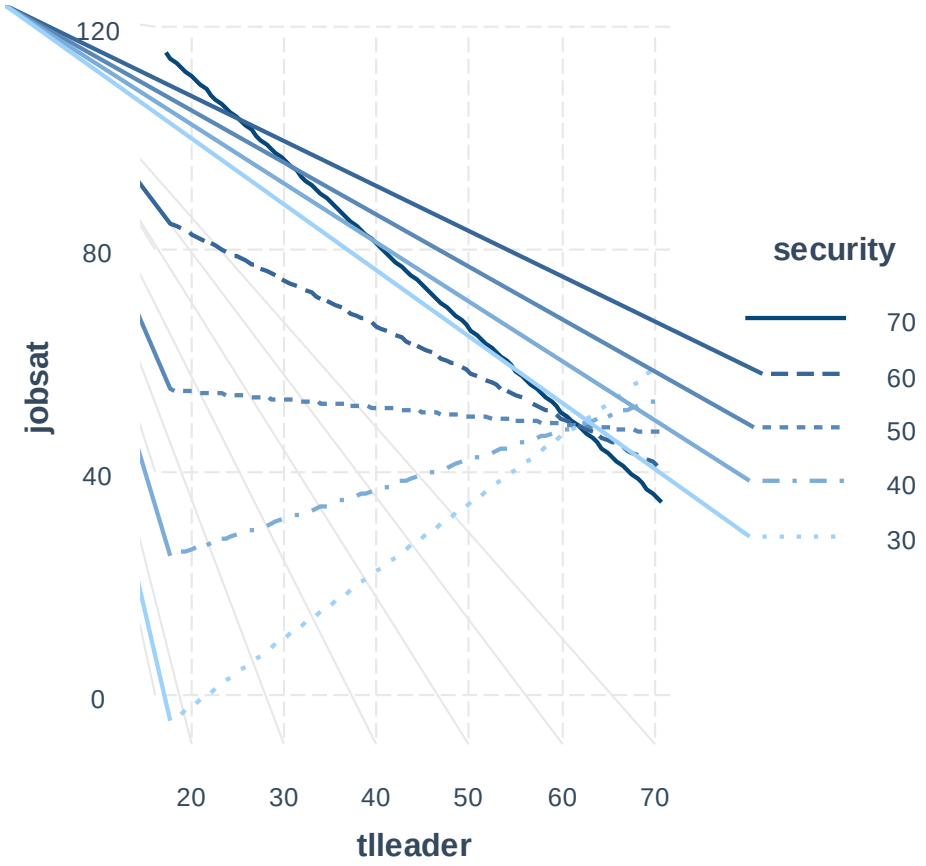
หากเพิ่มลง package นี้ อาจมี error ขึ้นเพื่อให้ลง package อื่นเพิ่มเติม ให้คุณลงตามที่เขาบอก อาจใช้คำสั่ง

```
install.packages("interactions", dependencies=TRUE)
```

เพื่อตัดปัญหาการขอให้ลง package อื่นเพิ่มเติม

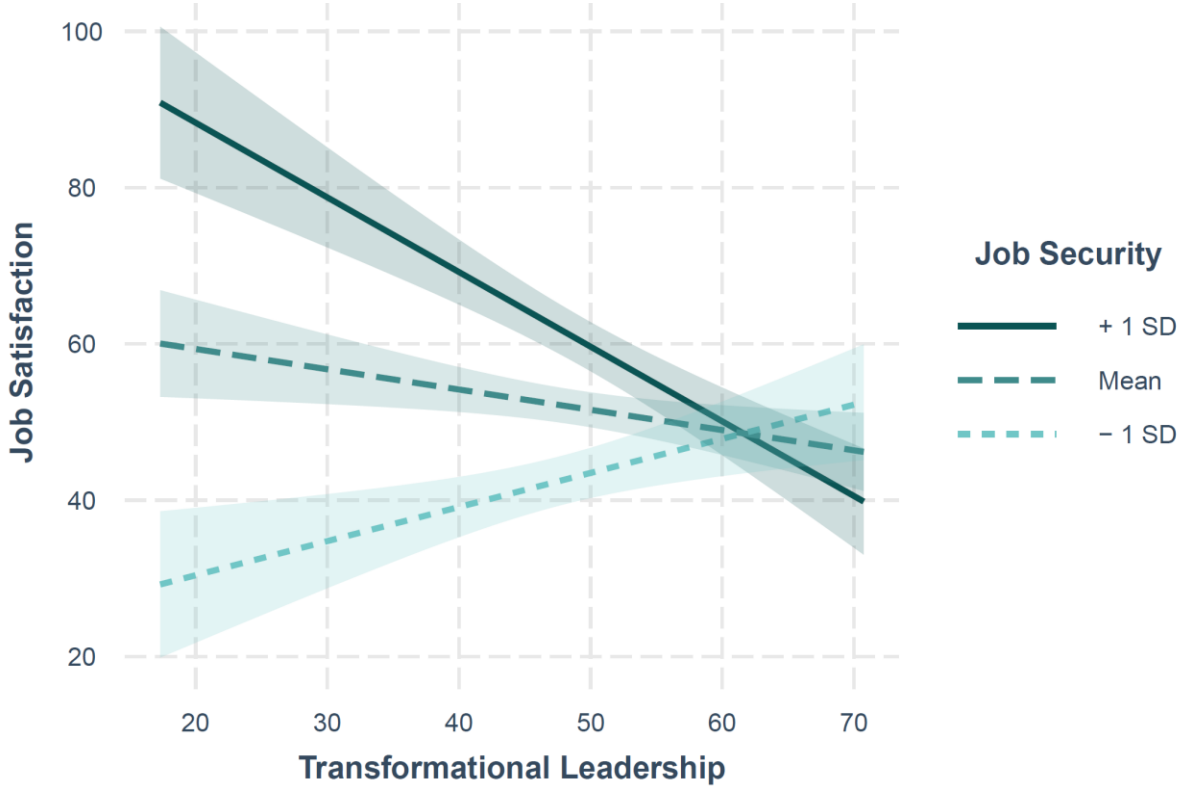
ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> interact_plot(out1a, pred="tlleader", modx="security", modx.values
= c(30, 40, 50, 60, 70), plot.points=TRUE)
```



ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> interact_plot(out1a, pred="tlleader", modx="security", interval=TRUE, int.width=.9,
+    x.label = "Transformational Leadership", y.label = "Job Satisfaction",
+    main.title = NULL,  legend.main = "Job Security",
+    colors = "seagreen")
```



```
> sim_slopes(out1a, pred="tlleader", modx="security")
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When security is OUTSIDE the interval [43.14, 51.44], the slope of
tlleader is p < .05.

Note: The range of observ

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of tlleader when security = 41.43 (- 1 SD):

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  0.44   0.17     2.52   0.01

Slope of tlleader when security = 51.65 (Mean):

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -0.26   0.12    -2.12   0.04

Slope of tlleader when security = 61.87 (+ 1 SD):

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -0.96   0.17    -5.61   0.00
```

หากตัวแปรกำกับมีค่าระหว่าง 43.1 ถึง 51.4 ความชันย่อยไม่แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

กล่าวคือ เมื่อความแน่นอนของสถานการณ์ระหว่าง 43.1 และ 51.4 ความชันในการทำนายความพึงพอใจในงานด้วยความเป็นผู้นำแบบเปลี่ยนแปลง ไม่แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

ความชันย่อย ในแต่ละค่าของความแน่นอนของสถานการณ์

$\bar{Z} - SD_Z = 41.4$ → $b_X = 0.44$ → $p = .015$

หากความแน่นอนของสถานการณ์ต่ำ ยิ่งระดับผู้นำเปลี่ยนแปลงสูง ความพึงพอใจในงานสูงขึ้น

$\bar{Z} = 51.7$ → $b_X = -0.26$ → $p = .038$

หากความแน่นอนของสถานการณ์ปานกลาง ยิ่งระดับผู้นำเปลี่ยนแปลงสูง พึงพอใจในงานต่ำลง

$\bar{Z} + SD_Z = 61.9$ → $b_X = -0.96$ → $p < .001$

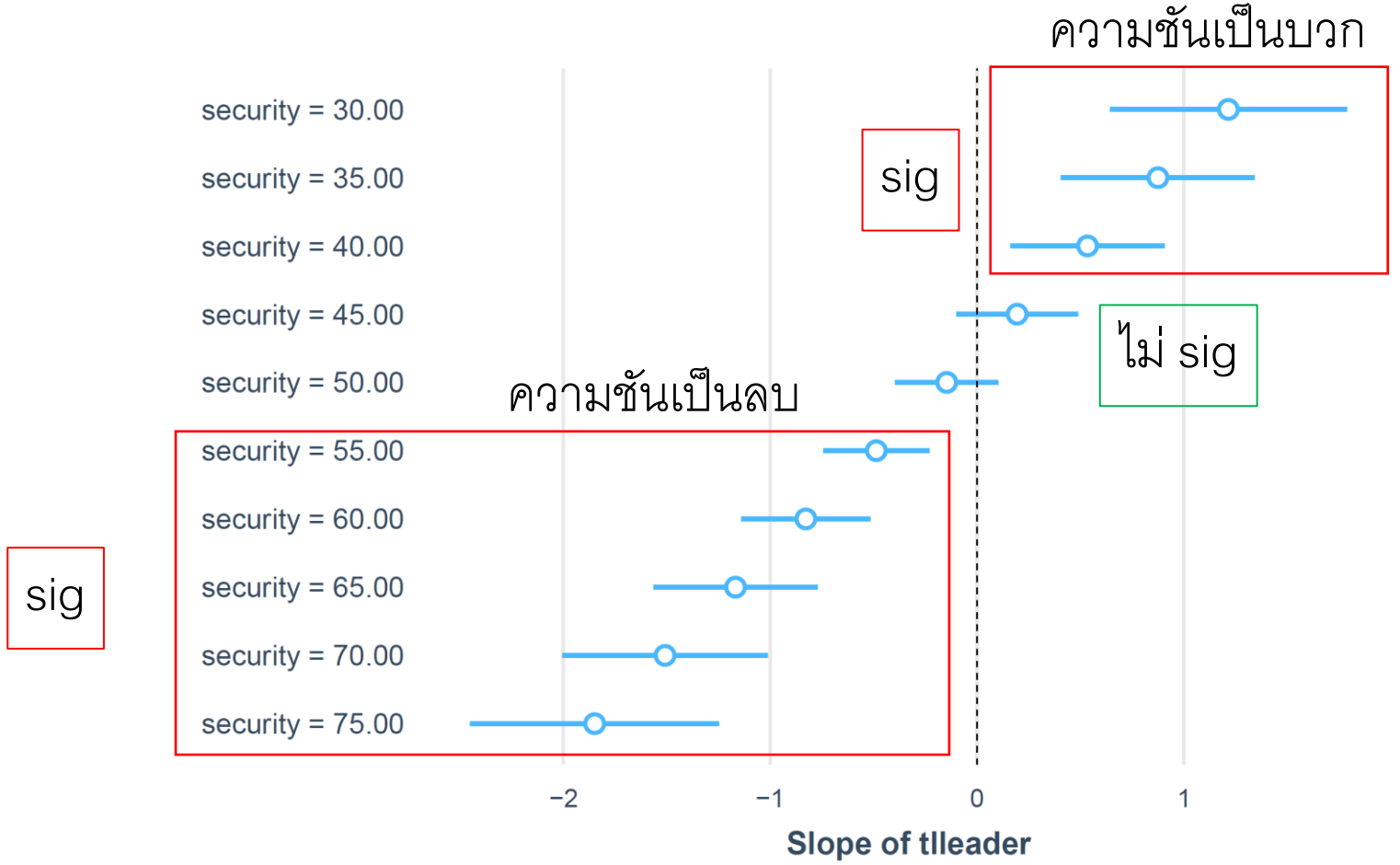
หากความแน่นอนของสถานการณ์มาก ยิ่งระดับผู้นำเปลี่ยนแปลงสูง พึงพอใจในงานต่ำลง

```
> sim_slopes(out1a, pred="tlleader", modx="security", cond.int=TRUE)
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When security is OUTSIDE the interval [43.14, 51.44], the slope of
tlleader is p < .05.

Note: The range of observed values of security is [28.29, 76.30]

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

When security = 41.43 (- 1 SD):

                            Est.   S.E.   t val.      p
-------------------------- ------- ------ -------- ------
Slope of tlleader             0.44   0.17     2.52   0.01
Conditional intercept        43.02   1.89    22.77   0.00

When security = 51.65 (Mean):

                            Est.   S.E.   t val.      p
-------------------------- ------- ------ -------- ------
Slope of tlleader            -0.26   0.12    -2.12   0.04
Conditional intercept        51.86   1.33    39.10   0.00

When security = 61.87 (+ 1 SD):

                            Est.   S.E.   t val.      p
-------------------------- ------- ------ -------- ------
Slope of tlleader            -0.96   0.17    -5.61   0.00
Conditional intercept        60.70   1.88    32.27   0.00
```

แสดงจุดตัดแกน Y ย่อยด้วย

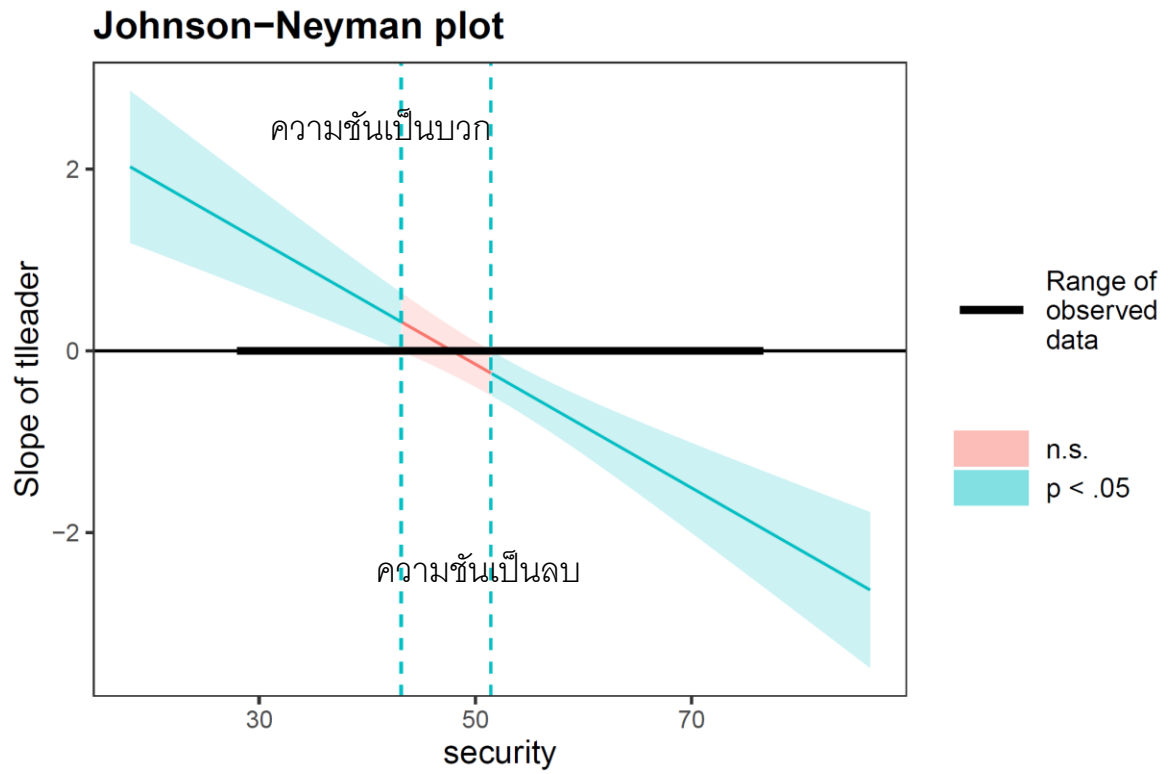
ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> ss <- sim_slopes(out1a, pred="tlleader", modx="security", modx.values = seq(30, 75, 5))
> plot(ss)
```



ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> johnson_neyman(out1a, pred="tlleader", modx="security", alpha = .05)
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When security is OUTSIDE the interval
[43.14, 51.44], the slope of tlleader is p < .05.

Note: The range of observed values of security
is [28.29, 76.30]
```



ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- งานวิจัยนี้ต้องการทดสอบอิทธิพลของลักษณะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงต่อความพึงพอใจของในงาน โดยมีความแน่นอนของสถานการณ์เป็นตัวแปรกำกับ ตารางที่ 1 แสดงสถิติพรรณนาของตัวแปรทั้งหมด จากการวิเคราะห์ถดถอยพบผลดังตารางที่ 2 ปฏิสัมพันธ์ระหว่างลักษณะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงและความแน่นอนของสถานการณ์มีผลต่อความพึงพอใจในงานอย่างมีนัยสำคัญ, $\Delta R^2 = .24$, $F(1, 56) = 33.08$, $p < .001$, ภาพที่ 1 แสดงลักษณะของปฏิสัมพันธ์ดังกล่าว กล่าวคือ เมื่อความแน่นอนของสถานการณ์ยิ่งน้อย อิทธิพลของลักษณะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงต่อความพึงพอใจในงาน ยิ่งไปในทิศทางบวก แต่หากความแน่นอนของสถานการณ์มาก อิทธิพลของลักษณะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงจะเป็นในทางลบต่อความพึงพอใจในงาน

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ตารางที่ 1 แสดงค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, และค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในการวิเคราะห์

ตัวแปร	1	2	3
1. ความพึงพอใจในงาน			
2. ความแน่นอนของสถานการณ์	.571		
3. ความเป็นผู้นำเปลี่ยนแปลง	-.138**	.088**	
M	51.21	51.65	48.90
SD	15.74	10.22	10.96

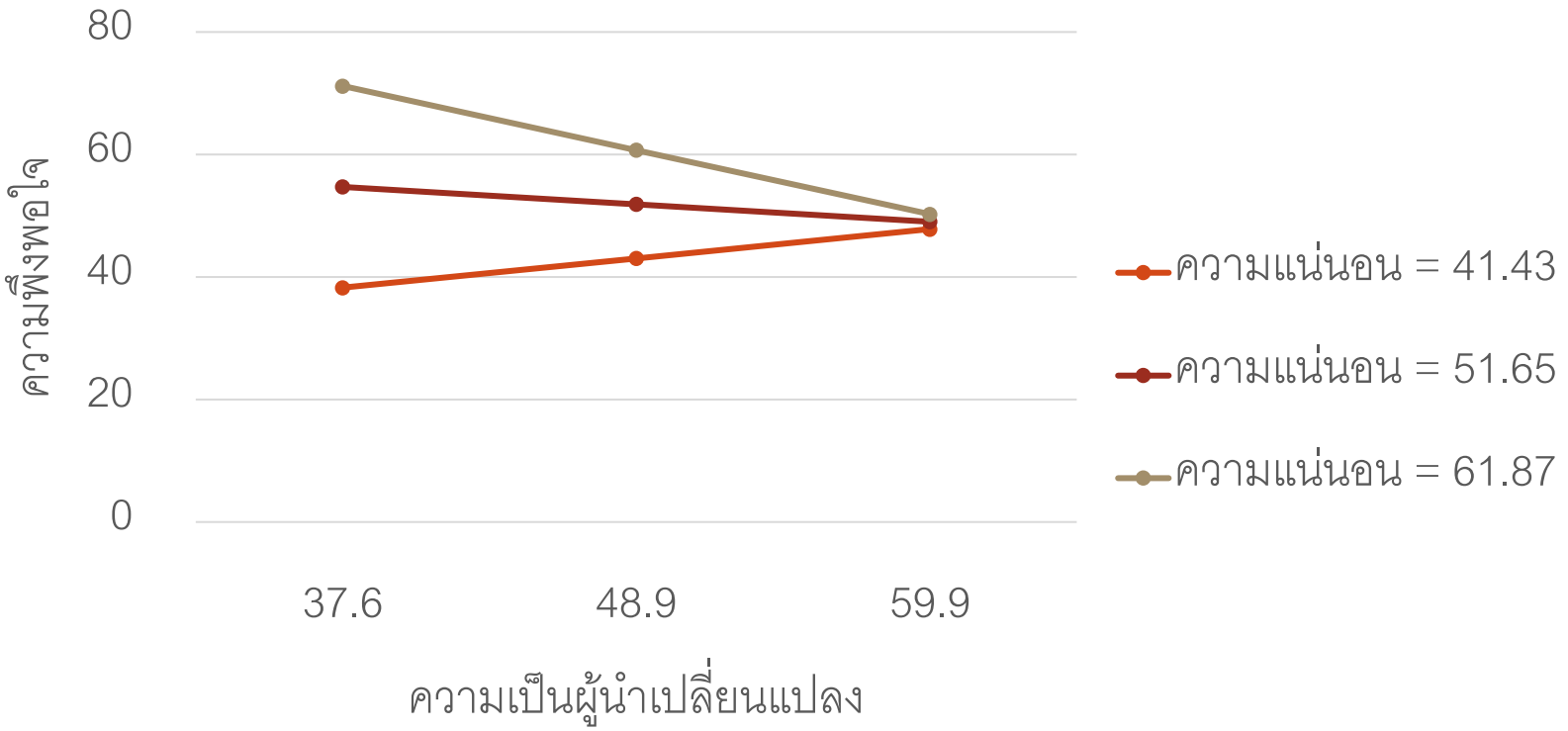
หมายเหตุ $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$

ตารางที่ 2 แสดงผลการวิเคราะห์ถดถอยในการทำนายความพึงพอใจในงาน

ตัวแปร	*b*
(จุดตัด)	-152.11**
ความแน่นอนของสถานการณ์	4.19**
ความเป็นผู้นำเปลี่ยนแปลง	3.26**
ปฏิสัมพันธ์	-0.068**
R^2	.774**

หมายเหตุ $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง



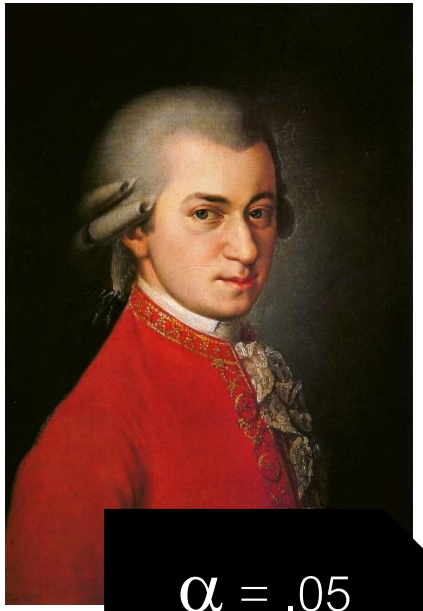
ภาพที่ 1 แสดงปฏิสัมพันธ์ระหว่างความเป็นผู้นำเปลี่ยนแปลงและความแน่นอนของสถานการณ์ต่อความพึงพอใจของในงาน

การเขียนรายงาน

- เมื่อทดสอบความชันย่อย ด้วยชุดคำสั่ง `interactions` เวอร์ชั่น 1.1.0 (Long, 2019) ใน R พบว่า หากความแน่นอนของสถานการณ์ต่ำ (41.43) ภาวะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงมีผลทางบวกต่อความพึงพอใจของลูกน้องอย่างมีนัยสำคัญ, $b = 0.44$, $p = .015$, เมื่อความแน่นอนอยู่ระดับปานกลาง (51.65) ภาวะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงมีผลทางลบต่อความพึงพอใจของลูกน้องอย่างมีนัยสำคัญ, $b = -0.26$, $p = .038$, เช่นเดียวกับความแน่นอนระดับสูง ที่มีผลทางลบอย่างมีนัยสำคัญ, $b = -0.96$, $p < .001$ ช่วงของค่าความแน่นอนของสถานการณ์ที่ผลของภาวะผู้นำแบบเปลี่ยนแปลงต่อความพึงพอใจของลูกน้องไม่ถึงระดับนัยสำคัญ หรือช่วงของ Johnson-Neyman เท่ากับ 43.14-51.44

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ทดสอบอิทธิพลร่วมของอายุ
และสถานะทางเศรษฐกิจและสังคม
ต่อรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิก
ควบคุมรสนิยมของผู้ปกครอง



$\alpha = .05$

เก็บข้อมูลสำรวจ 100 คน โดยเก็บข้อมูล
อายุ สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม รสนิยมการ
ฟังเพลงคลาสสิกของตนเองและผู้ปกครอง

สมมติฐาน คือ เมื่อควบคุมรสนิยมของผู้ปกครอง อายุและ
สถานะทางเศรษฐกิจและสังคมมีผลร่วมต่อรสนิยมของตนเอง

H_0: ไม่มีปฏิสัมพันธ์
ระหว่างสองตัวแปร

H_1: มีปฏิสัมพันธ์
ระหว่างสองตัวแปร

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> ex2 <- read.table("lecture3ex2.csv", sep=",", header=TRUE)
> describe(ex2)
          vars   n  mean    sd median trimmed  mad   min   max
ses          1 100  4.96  2.10   5.24    5.01 2.18  0.00  9.67
age          2 100 41.66  9.09  42.27   41.84 8.01 17.90 64.49
guarlike     3 100 50.77 10.81  52.08   51.33 9.16 20.00 76.16
partlike     4 100 64.72  9.71  65.46   65.09 9.74 30.84 80.00
          range  skew kurtosis   se
ses        9.67 -0.19    -0.51 0.21
age       46.59 -0.17    -0.10 0.91
guarlike  56.16 -0.49     0.29 1.08
partlike  49.16 -0.59     0.26 0.97
```

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> corr.test(ex2)
Call:corr.test(x = ex2)
Correlation matrix
           ses   age guarlike partlike
ses       1.00 -0.06     0.63     0.47
age      -0.06  1.00    -0.09     0.14
guarlike  0.63 -0.09     1.00     0.60
partlike  0.47  0.14     0.60     1.00
Sample Size
[1] 100
Probability values (Entries above the diagonal are adjusted for multiple tests.)
          ses  age guarlike partlike
ses      0.00 0.72     0.00     0.00
age      0.56 0.00     0.72     0.46
guarlike 0.00 0.36     0.00     0.00
partlike 0.00 0.15     0.00     0.00

 To see confidence intervals of the correlations, print with the short=FALSE option
```

```
> out2 <- lm(partlike ~ age + ses + guarlike, data=ex2)
> summary(out2)

Call:
lm(formula = partlike ~ age + ses + guarlike, data = ex2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-20.5429  -4.7012  -0.3549   5.8684  15.6513

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 28.49941    5.32750   5.349 5.98e-07 ***
age          0.21546    0.08404   2.564   0.0119 *
ses          0.70153    0.46733   1.501   0.1366
guarlike     0.46814    0.09105   5.142 1.44e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7.564 on 96 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4121,    Adjusted R-squared:  0.3937
F-statistic: 22.43 on 3 and 96 DF,  p-value: 4.345e-11
```

$$\hat{Y} = 28.50 + 0.22\text{Age} + 0.70\text{SES} + 0.47\text{Guarlike}$$

$R^2 = .41$, $F(3, 96) = 22.43$, $p < .001$

```
> out2a <- lm(partlike ~ age*ses + guarlike, data=ex2)
> summary(out2a)

Call:
lm(formula = partlike ~ age * ses + guarlike, data = ex2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
```

$$\hat{Y} = 59.9 - 0.52\text{Age} - 5.25\text{SES} + 0.14(\text{Age})(\text{SES}) + 0.45\text{Guarlike}$$

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 59.90367    9.82356   6.098  2.3e-08 ***
age         -0.52191    0.21361  -2.443 0.016399 *
ses         -5.25065    1.66125  -3.161 0.002112 **
guarlike     0.45095    0.08565   5.265  8.7e-07 ***
age:ses      0.14456    0.03891   3.715 0.000343 ***
---
Signif
```

$R^2 = .49$, $F(4, 95) = 22.51$, $p < .001$

```
*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7.105 on 95 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4866,    Adjusted R-squared:  0.465
F-statistic: 22.51 on 4 and 95 DF,  p-value: 4.239e-13
```

$$\hat{Y} = 59.9 - 0.52\text{Age} - 5.25\text{SES} + 0.14(\text{Age})(\text{SES}) + 0.45\text{Guarlike}$$

ถ้าอายุ, สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม, และความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครองเท่ากับ 0 แล้วความชอบเพลงคลาสสิกของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 59.9

เมื่อสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมเท่ากับ 0 และควบคุมให้ความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครองคงที่ หากอายุเพิ่มขึ้น 1 ปี ความชอบเพลงคลาสสิกจะน้อยลง 0.52 แต้ม

เมื่ออายุเท่ากับ 0 และควบคุมให้ความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครองคงที่ หากสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมเพิ่มขึ้น 1 แต้ม ความชอบเพลงคลาสสิกจะน้อยลง 5.25 แต้ม

ความชันของสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมต่อความชอบเพลงคลาสสิกเพิ่มขึ้น 0.14 แต้ม หากอายุเพิ่มขึ้น 1 ปี เมื่อควบคุมความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง

ความชอบเพลงคลาสสิกของกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น 0.45 แต้ม เมื่อความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครองเพิ่มขึ้น 1 แต้ม เมื่อควบคุมสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมและอายุ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

```
> anova(out2, out2a)
Analysis of Variance Table

Model 1: partlike ~ age + ses + guarlike
Model 2: partlike ~ age * ses + guarlike
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F   Pr(>F)
1     96 5492.7
2     95 4796.0  1    696.74 13.801 0.000343 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

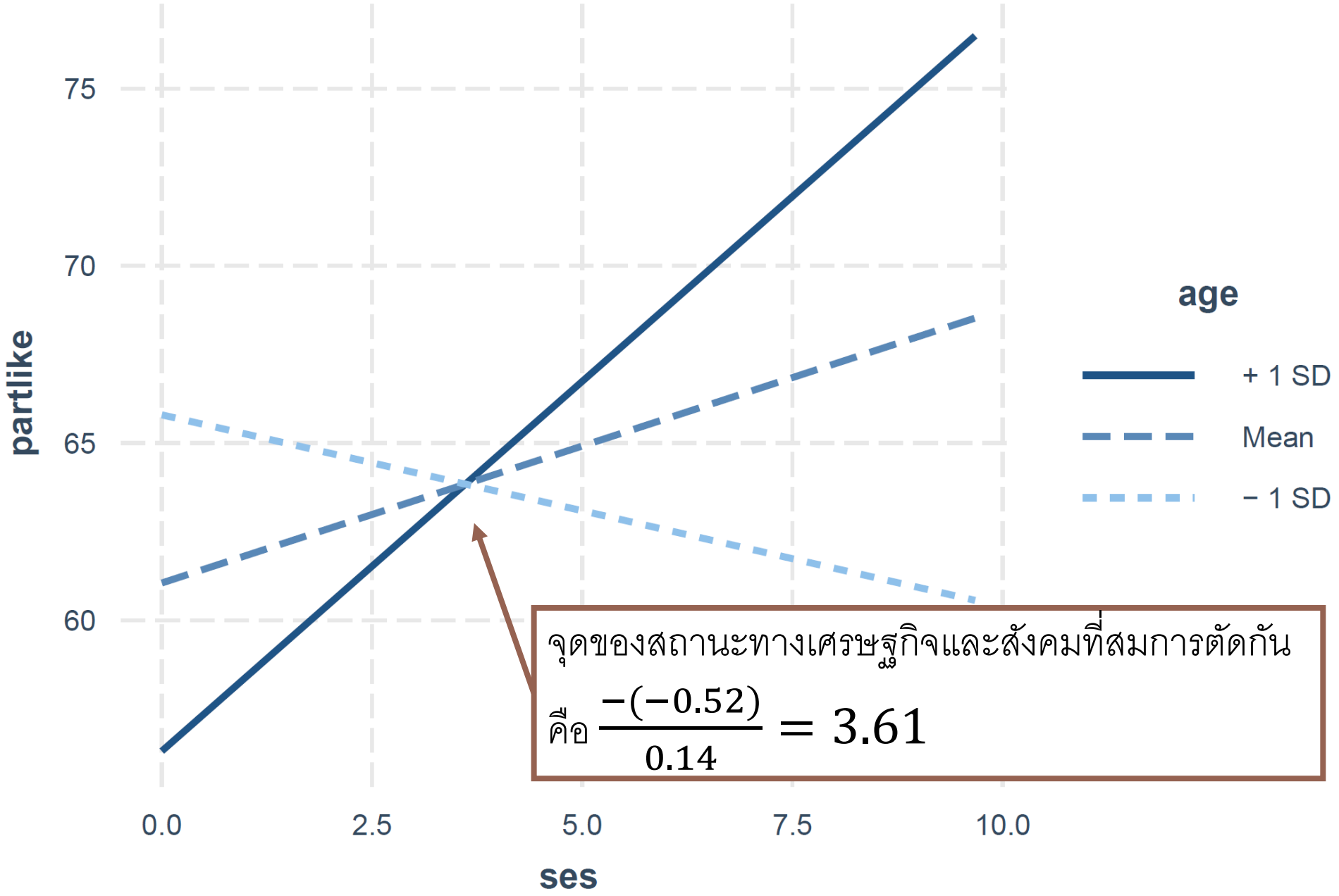
1. อายุ สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม และรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิกของผู้ปกครองอธิบายความแปรปรวนของรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิกของตนเองได้ 41%
2. เมื่อเพิ่มผลปฏิสัมพันธ์ การอธิบายความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 49% การเพิ่มขึ้นถึงระดับนัยสำคัญ, $F(1, 95) = 13.80$, $p < .001$

```
> sim_slopes(out2a, pred="ses", modx="age")
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When age is OUTSIDE the interval [26.38, 42.38],
p < .05.

Note: The range of observed values of age is [17

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of ses when age = 32.58 (- 1 SD):

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -0.54   0.55    -0.98   0.33

Slope of ses when age = 41.66 (Mean):

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  0.77   0.44     1.76   0.08

Slope of ses when age = 50.75 (+ 1 SD):

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  2.09   0.58     3.62   0.00
```

เมื่อทดสอบด้วยวิธีของ Johnson-Neyman พบว่าผลของสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมต่อความชอบเพลงคลาสสิกไม่ถึงระดับนัยสำคัญเมื่ออายุอยู่ที่ 26.4 ถึง 42.4 ปี หากมากกว่า 42.4 ปี ผลเป็นทางบวกอย่างมีนัยสำคัญ หากน้อยกว่า 26.4 ปี ผลเป็นทางลบอย่างมีนัยสำคัญ

ในอายุน้อย ผลของสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมต่อความชอบเพลงคลาสสิกไม่ถึงระดับนัยสำคัญ แต่ผลนี้จะถึงระดับนัยสำคัญในอายุมาก

```
> interact_plot(out2a, pred="ses", modx="age")
```



จุดของสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมที่สมการตัดกัน

คือ $\frac{-(-0.52)}{0.14} = 3.61$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- งานวิจัยนี้ต้องการทดสอบอิทธิพลร่วมกันของอายุและสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมต่อรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิก โดยควบคุมรสนิยมเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง ตารางที่ 3 แสดงสถิติพรรณนาของตัวแปรทั้งหมด จากการวิเคราะห์ถดถอยแบบลำดับขั้นพบผลดังตารางที่ 4 โดยปฏิสัมพันธ์ระหว่างอายุและสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมต่อรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิกถึงระดับนัยสำคัญ เมื่อควบคุมรสนิยมเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง, $\Delta R^2 = .07$, $F(1, 95) = 13.8$, $p < .001$, ภาพที่ 2 แสดงลักษณะของปฏิสัมพันธ์ดังกล่าว

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ตารางที่ 3 แสดงค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, และค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในการวิเคราะห์

ตัวแปร	1	2	3	4
1. รสนิยมเพลงคลาสสิก				
2. รสนิยมเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง	.598**			
3. อายุ	.144*	-.093		
4. สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม	.470**	.633**	-.059	
M	64.72	50.77	41.67	4.96
SD	9.71	10.81	9.09	2.10

หมายเหตุ $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$

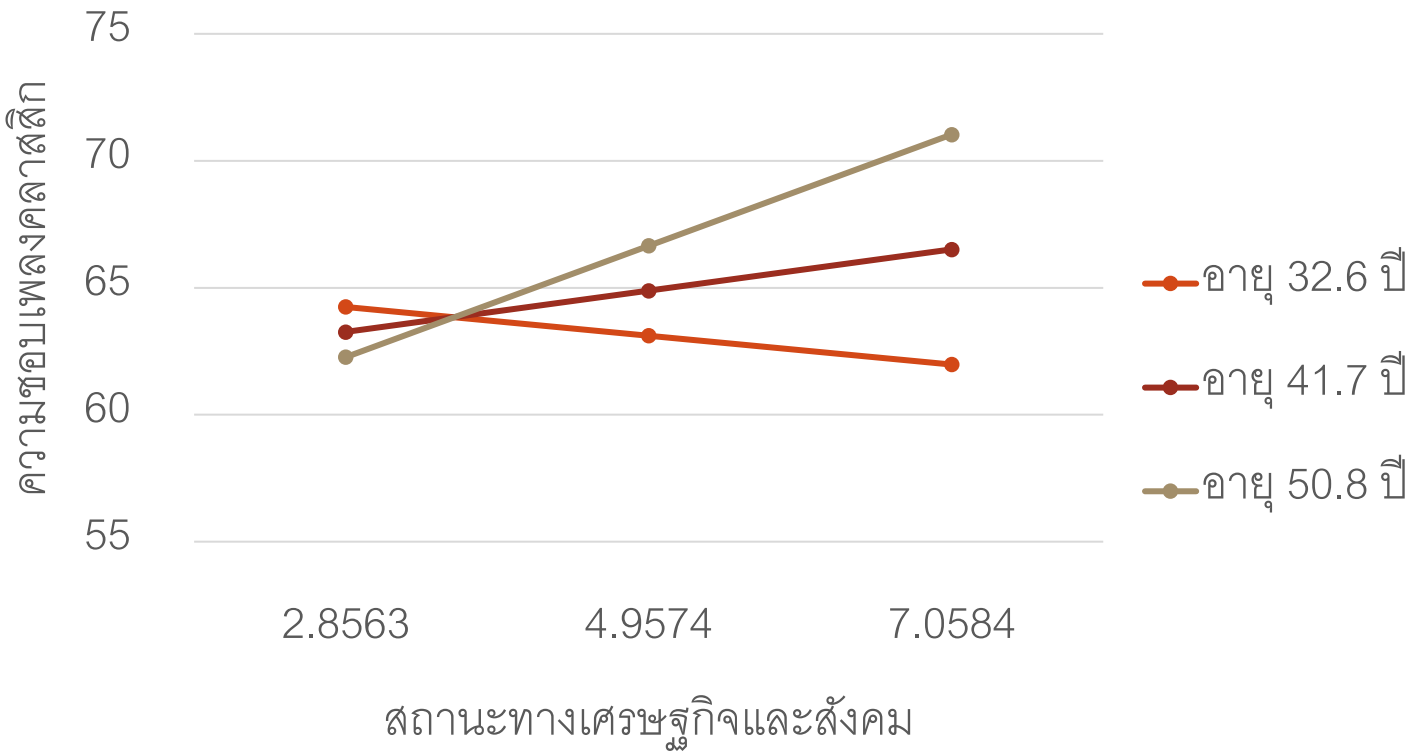
ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

ตารางที่ 4 แสดงผลการวิเคราะห์ถดถอย
ในการทำนายรสนิยมการฟังเพลงคลาสสิก

ตัวแปร	*b*
(จุดตัด)	59.90**
รสนิยมการฟังเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง	0.45**
อายุ	-0.52*
สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม	-5.25**
อายุ x สถานะทางเศรษฐกิจและสังคม	0.14**
R^2	.774**

หมายเหตุ $^*p < .05$, $^{**}p < .01$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง



ภาพที่ 2 แสดงปฏิสัมพันธ์ระหว่างสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมและอายุต่อความชอบเพลงคลาสสิก เมื่อควบคุมความชอบเพลงคลาสสิกของผู้ปกครอง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่อง

- เมื่อทดสอบความชันย่อย ด้วยชุดคำสั่ง interactions เวอร์ชั่น 1.1.0 (Long, 2019) ใน R พบว่า หากอายุน้อย (33) สถานะทางเศรษฐกิจและสังคมมีผลต่อรสนิยมเพลงคลาสสิกไม่ถึงระดับนัยสำคัญ, b = -0.54, p = .33, เช่นเดียวกับในอายุปานกลาง (42), b = .77, p = .082, เมื่ออายุมาก (51) สถานะทางเศรษฐกิจและสังคมมีผลทางบวกต่อรสนิยมเพลงคลาสสิกอย่างมีนัยสำคัญ, b = 2.09, p < .001 ช่วงของอายุที่ผลของสถานะทางเศรษฐกิจและสังคมไม่มีผลอย่างมีนัยสำคัญต่อรสนิยมเพลงคลาสสิก หรือช่วงของ Johnson-Neyman เท่ากับ 26.38-42.38

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- ให้ X เป็นตัวแปรอิสระและ D_1 เป็นตัวแปรดัมมี่จากตัวแปรจัดกลุ่ม 2 ระดับ การวิเคราะห์ถดถอยจะเป็นดังต่อไปนี้

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2D_1 + b_3XD_1$$

- การทดสอบว่ามีปฏิสัมพันธ์หรือไม่ สามารถทำได้ 2 วิธีเช่นเดิม คือ ทดสอบ b_3 หรือ ΔR^2

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- สมการถดถอยของแต่ละกลุ่ม สามารถหาได้จากการแทนค่า D_1 เป็น 0 หรือ 1

$$D_1 = 1 \rightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2(1) + b_3X(1) = (b_0 + b_2) + (b_1 + b_3)X$$
$$D_1 = 0 \rightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2(0) + b_3X(0) = (b_0) + (b_1)X$$

- ค่าสีแดง คือ จุดตัดแกน Y ย่อย (Simple Intercept)
- ค่าสีน้ำเงิน คือ ความชันย่อย (Simple Slope)

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2D_1 + b_3XD_1$$

- b_0 คือ ค่า Y ที่ทำนายได้ของกลุ่มอ้างอิงเมื่อ $X = 0$
- b_1 คือ ความชันของ X ต่อ Y ในกลุ่มอ้างอิง
- b_2 คือ ความแตกต่างของค่า Y ที่ทำนายได้ระหว่างกลุ่ม เมื่อ $X = 0$
- b_3 คือ ความแตกต่างของความชันระหว่างกลุ่ม

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- ให้ X เป็นตัวแปรอิสระและ D_1 และ D_2 เป็นตัวแปรดัมมี่จากตัวแปรจัดกลุ่ม 3 ระดับ การวิเคราะห์ถดถอยจะเป็นดังต่อไปนี้

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2D_1 + b_3D_2 + b_4XD_1 + b_5XD_2$$

- การทดสอบว่ามีปฏิสัมพันธ์หรือไม่ สามารถทำได้โดยเปรียบเทียบระหว่างโมเดลที่ใส่และไม่ใส่ตัวปฏิสัมพันธ์ แล้วเปรียบเทียบ ΔR^2

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- สมการถดถอยของแต่ละกลุ่มเป็นดังต่อไปนี้

$$D_1 = 1, D_2 = 0 \rightarrow \hat{Y} = (b_0 + b_2) + (b_1 + b_4)X$$
$$D_1 = 0, D_2 = 1 \rightarrow \hat{Y} = (b_0 + b_3) + (b_1 + b_5)X$$
$$D_1 = 0, D_2 = 0 \rightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1X$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2D_1 + b_3D_2 + b_4XD_1 + b_5XD_2$$

- b_0 คือ ค่า Y ที่ทำนายได้ของกลุ่มอ้างอิง เมื่อ $X = 0$
- b_1 คือ ความชันของ X ต่อ Y ในกลุ่มอ้างอิง
- b_2 คือ ความแตกต่างของค่า Y ที่ทำนายได้ระหว่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มอ้างอิง เมื่อ $X = 0$
- b_3 คือ ความแตกต่างของค่า Y ที่ทำนายได้ระหว่างกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอ้างอิง เมื่อ $X = 0$
- b_4 คือ ความแตกต่างของความชันระหว่างกลุ่มที่ 1 และกลุ่มอ้างอิง
- b_5 คือ ความแตกต่างของความชันระหว่างกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอ้างอิง

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- ในบางครั้ง $X = 0$ ไม่มีความหมาย คุณอาจเปลี่ยนศูนย์กลางของ X ได้ เช่น

$$\hat{Y} = b_0' + b_1'(X - m) + b_2' D_1 + b_3'(X - m)D_1$$

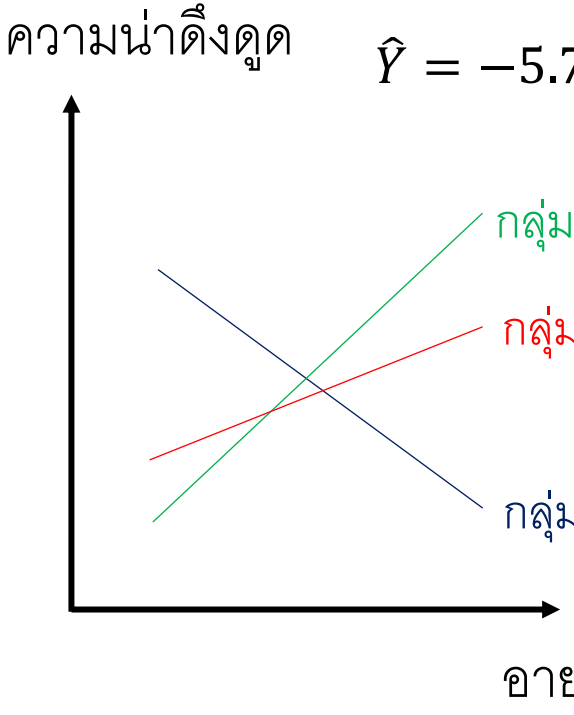
- b_0' คือ ค่า Y ที่ทำนายได้ของกลุ่มอ้างอิง เมื่อ $X = m$
- b_1' คือ ความชันของ X ต่อ Y ในกลุ่มอ้างอิง
- b_2' คือ ความแตกต่างของค่า Y ที่ทำนายได้ระหว่างกลุ่ม เมื่อ $X = m$
- b_3' คือ ความแตกต่างของความชันระหว่างกลุ่ม

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- เช่นเดิม ลำดับการทดสอบสมมติฐานก็จะคล้ายกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง
- หากปฏิสัมพันธ์ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ ให้นำปฏิสัมพันธ์ออกจากสมการทำนาย แล้วแปลความหมายเหมือนการวิเคราะห์ถดถอยปกติ (หรืออาจเปลี่ยนไปใช้ ANCOVA ได้)
- หากปฏิสัมพันธ์ถึงระดับนัยสำคัญ ให้แปลความหมายความชันย่อย ซึ่งอาจมองได้สองรูปแบบ คือ
  - ให้ตัวแปรจัดกลุ่มเป็นตัวแปรกำกับ ให้หาความชันของตัวแปรต่อเนื่องในแต่ละกลุ่ม
  - ให้ตัวแปรต่อเนื่องเป็นตัวแปรกำกับ ให้ทดสอบว่าค่าของตัวแปรตามมีความแตกต่างระหว่างกลุ่มในแต่ละค่าของตัวแปรต่อเนื่องหรือไม่

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- ให้ X = อายุ, Y = ความน่าดึงดูดของโฆษณา, และ G = ชนิดของโฆษณา (D_1 = โฆษณาเน้นหน้าใส, D_2 = โฆษณาลดริ้วรอย)



$$\hat{Y} = -5.71 + 1.43X + 94.29D_1 + 4.29D_2 - 2.57XD_1 - 0.57XD_2$$

กลุ่มที่ 2 โฆษณาลดริ้วรอย $\hat{Y} = -1.43 + 0.86X$

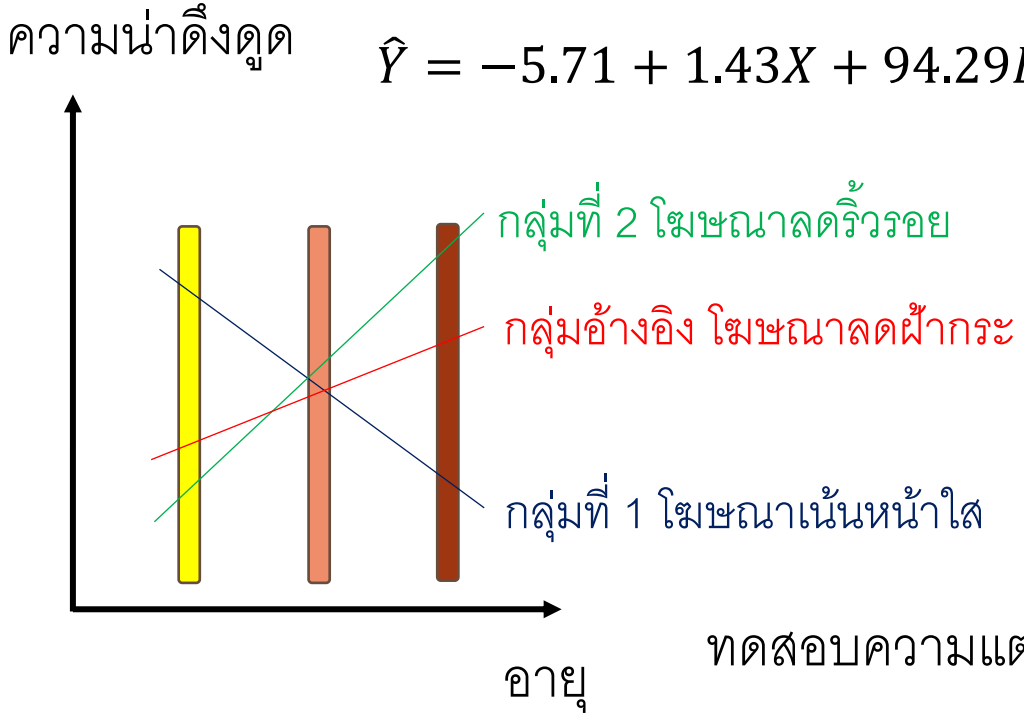
กลุ่มอ้างอิง โฆษณาลดฝ้ากระ $\hat{Y} = -5.71 + 1.43X$

กลุ่มที่ 1 โฆษณาเน้นหน้าใส $\hat{Y} = 88.57 - 1.14X$

ทดสอบความชันย่อยของแต่ละกลุ่ม ว่าต่างจาก 0 หรือไม่

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- ให้ X = อายุ, Y = ความน่าดึงดูดของโฆษณา, และ G = ชนิดของโฆษณา (D_1 = โฆษณาเน้นหน้าใส, D_2 = โฆษณาลดริ้วรอย)



$$\hat{Y} = -5.71 + 1.43X + 94.29D_1 + 4.29D_2 - 2.57XD_1 - 0.57XD_2$$

อายุ	หน้าใส	ลดริ้วรอย	ลดฝ้ากระ
25	60.00	20.00	30.00
40	42.86	32.86	51.43
55	25.71	45.71	72.86

ทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มในแต่ละอายุหรือไม่

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- เช่นเดิม ค่าของตัวแปรกำกับแบบต่อเนื่องที่ใช้ในการทดสอบความชันย่อย
  - $\bar{X}, \bar{X} - SD_X, \bar{X} + SD_X$
  - 10-th, 25-th, 50-th, 75-th, และ 90-th Percentile
  - ค่าที่สนใจหากคะแนนดิบของตัวแปรกำกับมีความหมาย เช่น ความชื้นเท่ากับ 0%, 25%, 50%, 75%, และ 100%
- ในงานวิจัยทางจิตวิทยาส่วนใหญ่ จะใช้ค่าเฉลี่ยบวกลบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นค่าในการทดสอบ
- ส่วนค่าของตัวแปรกำกับแบบจัดกลุ่ม ก็จะใช้แต่ละกลุ่มเป็นค่าในการตรวจสอบปฏิสัมพันธ์

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

เวลาสายส่งผลต่อความโกรธ
แต่ผู้วิจัยคาดว่าอิทธิพลนี้
ขึ้นอยู่กับสัญชาติ
(ไทย, จีน, อังกฤษ)

$\alpha = .05$

เก็บข้อมูลจากคนทั้ง 3 ชาติ ชาติละ 50 คน

สมมติฐาน คือ อิทธิพลของเวลาที่สายต่อ
ความโกรธแตกต่างกันระหว่างสัญชาติ

H_0: ความชันย่อยไม่
แตกต่างกันระหว่างสัญชาติ

H_1: ความชันย่อยแตกต่างกัน
ระหว่างสัญชาติ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

```
> ex3 <- read.table("lecture3ex3.csv", sep=",", header=TRUE)
> describe(ex3)
         vars   n  mean   sd median trimmed  mad   min   max range skew kurtosis   se
latemins    1 150  3.31 2.51   3.00    3.04 2.97  0.00 12.00 12.00 1.05     1.12 0.21
country*    2 150  2.00 0.82   2.00    2.00 1.48  1.00  3.00  2.00 0.00    -1.52 0.07
angry       3 150 36.18 9.48  34.92   35.37 8.76 19.68 73.74 54.05 0.88     1.20 0.77

> corr.test(ex3[,c("latemins", "angry")])
Call:corr.test(x = ex3[, c("latemins", "angry")])
Correlation matrix
         latemins angry
latemins     1.00  0.53
angry        0.53  1.00
Sample Size
[1] 150
Probability values (Entries above the diagonal are adjusted for multiple tests.)
         latemins angry
latemins        0     0
angry           0     0

 To see confidence intervals of the correlations, print with the short=FALSE option

> table(ex3["country"])

chinese english    thai
     50      50      50

> ex3["country"] <- relevel(ex3["country"], ref="thai")
```

```
> out3 <- lm(angry ~ latemins + country, data=ex3)
> summary(out3)

Call:
lm(formula = angry ~ latemins + country, data = ex3)

Residuals:

-15.

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     26.3328     1.2353  21.318  < 2e-16 ***
latemins         1.9676     0.2266   8.685 6.98e-15 ***
countrychinese   0.8071     1.3907   0.580    0.563
countryenglish   9.1790     1.3907   6.600 7.10e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.953 on 146 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4733,    Adjusted R-squared:  0.4625
F-statistic: 43.73 on 3 and 146 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

$$\hat{Y} = 26.33 + 1.97\text{Latemins} + 0.81D_{\text{Chinese}} + 9.18D_{\text{English}}$$

$R^2 = .47$, $F(3, 146) = 43.73$, $p < .001$

```
> out3a <- lm(angry ~ latemins*country, data=ex3)
> summary(out3a)

Call:
lm(formula = angry ~ latemins * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13
```

$$\hat{Y} = 29.5 + 1.0\text{Late} - 0.26D_C + 0.25D_E + 0.31D_C(\text{Late}) + 2.67D_E(\text{Late})$$

```
Coe
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)              29.5190     1.5485  19.063  < 2e-16 ***
latemins                  1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese           -0.2551     2.0873  -0.122  0.90290
countryenglish            0.2512     2.1779   0.115  0.90833
latemins:countrychinese   0.3140     0.5051   0.622  0.53516
latemins:countryenglish   2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

$R^2 = .57$, $F(5, 144) = 37.90$, $p < .001$

$$\hat{Y} = 29.5 + 1.0\text{Late} - 0.26D_C + 0.25D_E + 0.31D_C(\text{Late}) + 2.67D_E(\text{Late})$$

ถ้าเวลามาสายเท่ากับ 0 นาที คนไทยจะโกรธเท่ากับ 29.5

ถ้าสายเพิ่มขึ้น 1 นาที คนไทยจะโกรธเพิ่มขึ้น 1 แต้ม

เมื่อเวลามาสายเท่ากับ 0 นาที คนจีนจะโกรธน้อยกว่าคนไทย 0.26 แต้ม

เมื่อเวลามาสายเท่ากับ 0 นาที คนอังกฤษจะโกรธมากกว่าคนไทย 0.25 แต้ม

เมื่อเวลามาสายเพิ่มขึ้น 1 นาที ระดับความโกรธที่เพิ่มขึ้นของคนจีนมากกว่าระดับความโกรธที่เพิ่มขึ้นของคนไทย 0.31

เมื่อเวลามาสายเพิ่มขึ้น 1 นาที ระดับความโกรธที่เพิ่มขึ้นของคนอังกฤษมากกว่าระดับความโกรธที่เพิ่มขึ้นของคนไทย 2.67

```
> anova(out3, out3a)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ latemins + country
Model 2: angry ~ latemins * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    146 7058.5
2    144 5786.4  2    1272.1 15.828 6.113e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

1. เวลาที่สาย และประเทศ สามารถอธิบายความแปรปรวนของความโกรธได้ 47%
2. เมื่อเพิ่มผลปฏิสัมพันธ์ การอธิบายความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 57% การเพิ่มขึ้นถึงระดับนัยสำคัญ, $F(2, 144) = 15.83$, $p < .001$ แสดงว่าเมื่อเวลาที่สายเพิ่มขึ้น 1 นาที ระดับความโกรธที่เพิ่มขึ้นแตกต่างกันระหว่างประเทศ

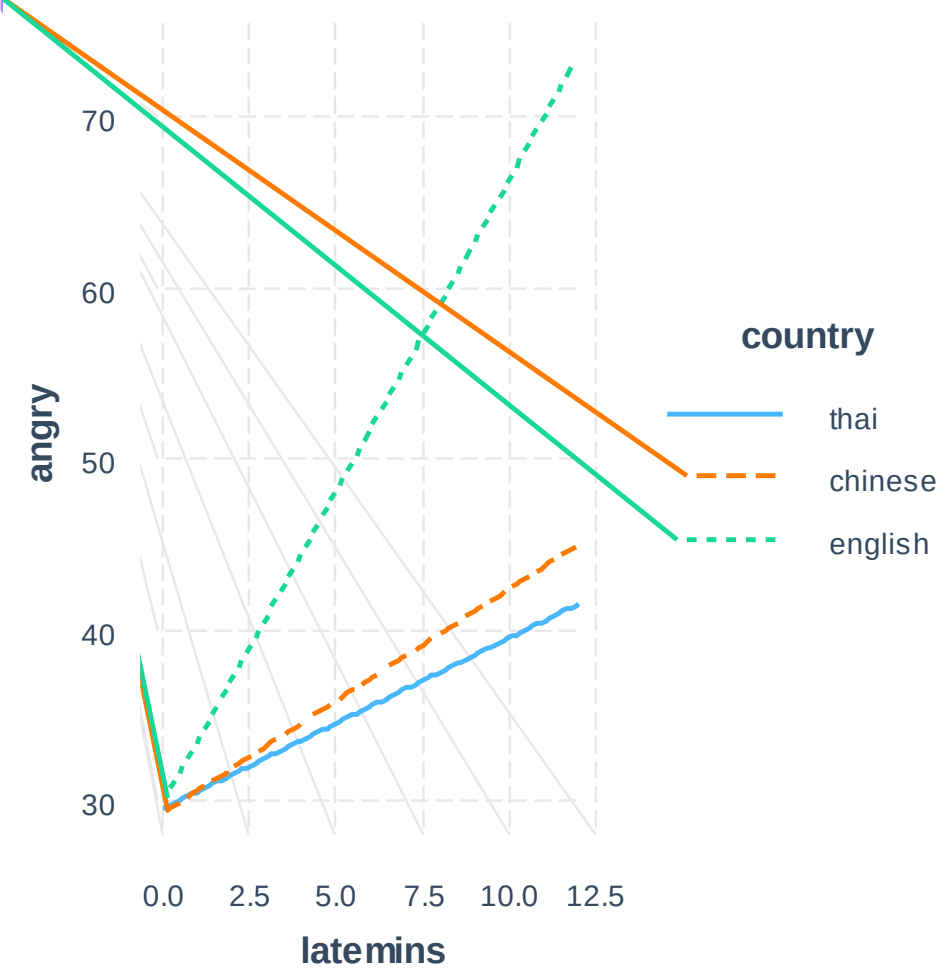
```
> sim_slopes(out3a, pred="latemins", modx="country")
SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of latemins when country = english:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  3.67   0.37     9.98   0.00

Slope of latemins when country = chinese:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  1.32   0.33     3.99   0.00

Slope of latemins when country = thai:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  1.00   0.38     2.62   0.01

Warning message:
Johnson-Neyman intervals are not available for factor moderators.
```

```
> out3a <- lm(angry ~ latemins*country, data=ex3)
> summary(out3a)

Call:
lm(formula = angry ~ latemins * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)               29.5190     1.5485  19.063  < 2e-16 ***
latemins                   1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese            -0.2551     2.0873  -0.122  0.90290
countryenglish             0.2512     2.1779   0.115  0.90833
latemins:countrychinese    0.3140     0.5051   0.622  0.53516
latemins:countryenglish    2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***

Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

1. สำหรับทุกสัญชาติ ยิ่งเวลามาสายมากขึ้น ความโกรธจะมากขึ้น
2. เมื่อดูสัมประสิทธิ์ถดถอย คนอังกฤษ (3.67) จะมีความชันสูงกว่าคนไทย (1.00) อย่างมีนัยสำคัญ แต่คนจีน (1.32) และคนไทย (1.00) มีความชันไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

```
> interact_plot(out3a, pred="latemins", modx="co
```



เปรียบเทียบความโกรธระหว่างสัญชาติ เมื่อกำหนดระยะเวลาสาย = 0 นาที

```
> out3a <- lm(angry ~ latemins*country, data=ex3)
> out3ax <- lm(angry ~ latemins + latemins:country, data=ex3)
> anova(out3ax, out3a)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ latemins + latemins:country
Model 2: angry ~ latemins * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1    146 5788.8
2    144 5786.4  2    2.4004 0.0299 0.9706
> summary(out3a)

Call:
lm(formula = angry ~ latemins * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)            29.5190     1.5485  19.063  < 2e-16 ***
latemins                1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese         -0.2551     2.0873  -0.122  0.90290
countryenglish          0.2512     2.1779   0.115  0.90833
latemins:countrychinese 0.3140     0.5051   0.622  0.53516
latemins:countryenglish 2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ทั้งสามกลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คนจีนโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

คนอังกฤษโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

เปรียบเทียบความโกรธระหว่างสัญชาติ เมื่อกำหนดระยะเวลาสาย = 3 นาที

```
> out3a3 <- lm(angry ~ I(latemins - 3)*country, data=ex3)
> out3a3x <- lm(angry ~ I(latemins - 3) + I(latemins - 3):country, data=ex3)
> anova(out3a3x, out3a3)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ I(latemins - 3) + I(latemins - 3):country
Model 2: angry ~ I(latemins - 3) * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    146 7836.4
2    144 5786.4  2      2050 25.508 3.29e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(out3a3)

Call:
lm(formula = angry ~ I(latemins - 3) * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                    32.5251     0.9038  35.987  < 2e-16 ***
I(latemins - 3)                 1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese                  0.6868     1.2759   0.538  0.59119
countryenglish                  8.2439     1.2806   6.437 1.69e-09 ***
I(latemins - 3):countrychinese  0.3140     0.5051   0.622  0.53516
I(latemins - 3):countryenglish  2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คนจีนโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

คนอังกฤษโกรธแตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

เปรียบเทียบความโกรธระหว่างสัญชาติ เมื่อกำหนดระยะเวลาสาย = 6 นาที

```
> out3a6 <- lm(angry ~ I(latemins - 6)*country, data=ex3)
> out3a6x <- lm(angry ~ I(latemins - 6) + I(latemins - 6):country, data=ex3)
> anova(out3a6x, out3a6)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ I(latemins - 6) + I(latemins - 6):country
Model 2: angry ~ I(latemins - 6) * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    146 9467.6
2    144 5786.4  2    3681.2 45.805 4.019e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(out3a6)

Call:
lm(formula = angry ~ I(latemins - 6) * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                   35.5313     1.3678  25.977  < 2e-16 ***
I(latemins - 6)                1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese                 1.6288     1.8683   0.872  0.38478
countryenglish                16.2365     1.8976   8.556 1.58e-14 ***
I(latemins - 6):countrychinese 0.3140     0.5051   0.622  0.53516
I(latemins - 6):countryenglish 2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คนจีนโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

คนอังกฤษโกรธแตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

เปรียบเทียบความโกรธระหว่างสัญชาติ เมื่อกำหนดระยะเวลาสาย = 9 นาที

```
> out3a9 <- lm(angry ~ I(latemins - 9)*country, data=ex3)
> out3a9x <- lm(angry ~ I(latemins - 9) + I(latemins - 9):country, data=ex3)
> anova(out3a9x, out3a9)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ I(latemins - 9) + I(latemins - 9):country
Model 2: angry ~ I(latemins - 9) * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    146 8589.9
2    144 5786.4  2    2803.5 34.884 4.429e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(out3a9)

Call:
lm(formula = angry ~ I(latemins - 9) * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                   38.5374     2.3579  16.344  < 2e-16 ***
I(latemins - 9)                1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese                 2.5707     3.1536   0.815  0.41633
countryenglish                24.2292     3.2597   7.433 8.68e-12 ***
I(latemins - 9):countrychinese 0.3140     0.5051   0.622  0.53516
I(latemins - 9):countryenglish 2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คนจีนโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

คนอังกฤษโกรธแตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

เปรียบเทียบความโกรธระหว่างสัญชาติ เมื่อกำหนดระยะเวลาสาย = 12 นาที

```
> out3a12 <- lm(angry ~ I(latemins - 12)*country, data=ex3)
> out3a12x <- lm(angry ~ I(latemins - 12) + I(latemins - 12):country, data=ex3)
> anova(out3a12x, out3a12)
Analysis of Variance Table

Model 1: angry ~ I(latemins - 12) + I(latemins - 12):country
Model 2: angry ~ I(latemins - 12) * country
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    146 8107.5
2    144 5786.4  2    2321.1 28.882 2.841e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(out3a12)

Call:
lm(formula = angry ~ I(latemins - 12) * country, data = ex3)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.6988  -4.5530   0.1675   3.7784  16.0432

Coefficients:
                              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                    41.5436     3.4473  12.051  < 2e-16 ***
I(latemins - 12)                1.0021     0.3826   2.619  0.00976 **
countrychinese                  3.5126     4.5817   0.767  0.44453
countryenglish                 32.2218     4.7659   6.761 3.18e-10 ***
I(latemins - 12):countrychinese 0.3140     0.5051   0.622  0.53516
I(latemins - 12):countryenglish 2.6642     0.5304   5.023 1.48e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 6.339 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5682,    Adjusted R-squared:  0.5532
F-statistic:  37.9 on 5 and 144 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คนจีนโกรธไม่แตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

คนอังกฤษโกรธแตกต่างจากคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ

การเขียนรายงาน

- งานวิจัยนี้ต้องการทดสอบอิทธิพลของจำนวนนาทีมาสายต่อความโกรธ โดยมีสัญชาติ (ไทย, จีน, และอังกฤษ) เป็นตัวแปรกำกับ ตารางที่ 5 แสดงสถิติพรรณนาของตัวแปรทั้งหมด จากการวิเคราะห์ถดถอยแบบลำดับขั้น พบผลดังตารางที่ 6 โดยปฏิสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนาทีที่มาสายและสัญชาติต่อความโกรธถึงระดับนัยสำคัญ, $\Delta R^2 = .09$, $F(2, 144) = 15.83$, $p < .001$, ภาพที่ 3 แสดงลักษณะของปฏิสัมพันธ์ดังกล่าว

การเขียนรายงาน

ตารางที่ 5 แสดงค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, และค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในการวิเคราะห์

ตัวแปร	1	2
1. ความโกรธ		
2. จำนวนนาทีที่มาสาย	.530**	
ไทย	32.83 (6.07)	3.30 (2.37)
จีน	33.55 (7.49)	3.26 (2.75)
อังกฤษ	42.16 (11.21)	3.38 (2.47)

หมายเหตุ *$p < .05$, **$p < .01$, ในแถวของแต่ละสัญชาติแสดงค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในวงเล็บ

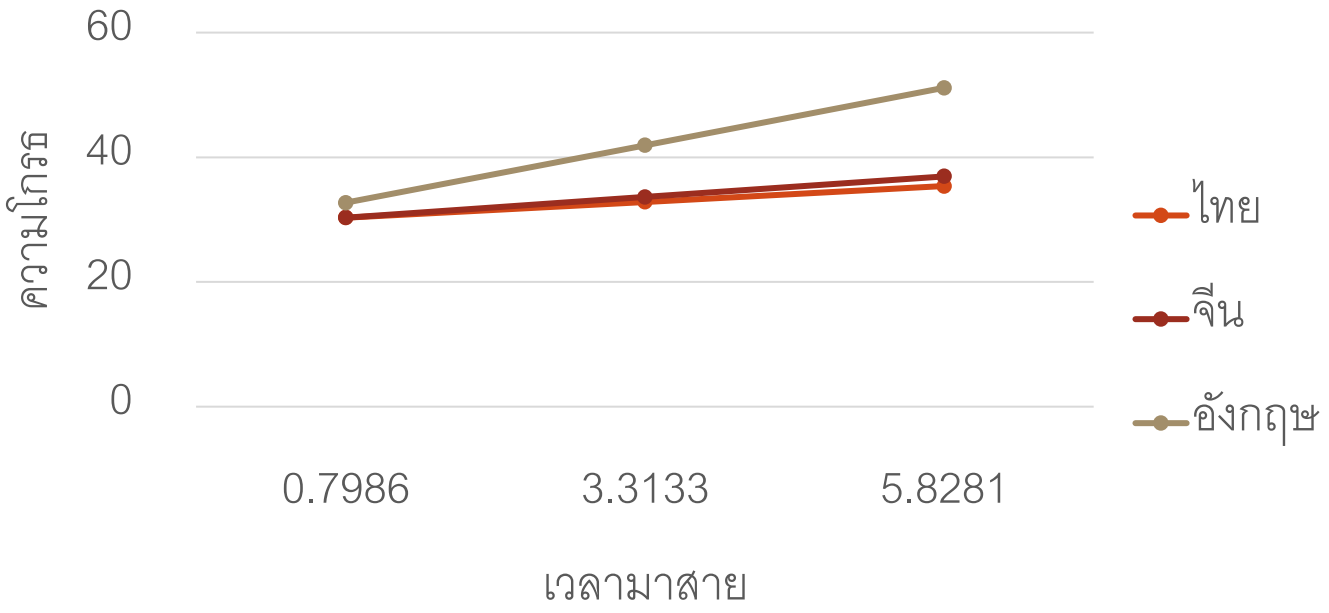
การเขียนรายงาน

ตารางที่ 6 แสดงผลการวิเคราะห์ถดถอยในการทำนายความโกรธ

ตัวแปร	*b*
(จุดตัด)	29.52*
จำนวนนาทีที่มาสาย	1.00**
สัญชาติจีน	-0.26
สัญชาติอังกฤษ	0.25
จำนวนนาทีที่มาสาย x สัญชาติจีน	0.31
จำนวนนาทีที่มาสาย x สัญชาติอังกฤษ	2.66**
R^2	.568**

หมายเหตุ *$p < .05$, **$p < .01$

การเขียนรายงาน



ภาพที่ 3 แสดงอิทธิพลของจำนวนนาทีที่มาสายต่อความโกรธในกลุ่มตัวอย่างแต่ละสัญชาติ

การเขียนรายงาน

- ในทุกสัญชาติ จำนวนนาทีที่มาสายมีผลทางบวกต่อความโกรธอย่างมีนัยสำคัญ (*p*s < .01), $b_{ไทย}$ = 1.0, $b_{จีน}$ = 1.3, $b_{อังกฤษ}$ = 3.7, โดยขนาดอิทธิพลระหว่างคนไทยและคนจีนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ (*p* = .54) แต่ขนาดอิทธิพลของคนอังกฤษสูงกว่าคนไทยอย่างมีนัยสำคัญ (*p* < .001)
- หากตรวจสอบความแตกต่างระหว่างสัญชาติ ในแต่ละระดับของจำนวนนาทีที่มาสาย พบผลดังตารางที่ 7 กล่าวคือ ความแตกต่างระหว่างกลุ่มไม่ถึงระดับนัยสำคัญ เมื่อจำนวนนาทีที่มาสายน้อย แต่ความแตกต่างถึงระดับนัยสำคัญ เมื่อจำนวนนาทีที่มาสายสูง

การเขียนรายงาน

ตารางที่ 7 แสดงค่าเฉลี่ยของแต่ละสัญชาติ และการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยในแต่ละค่าของจำนวนนาทีที่มาสาย

นาทีที่มาสาย	*F*	*p*	ไทย	จีน	อังกฤษ	จีน – ไทย	อังกฤษ – ไทย
0	0.03	.970	29.52	29.26	29.77	-0.26	0.25
3	25.51	< .001	32.33	33.21	40.77	0.69	8.24**
6	45.81	< .001	35.53	37.16	51.77	1.63	16.24**
9	34.88	< .001	38.54	41.11	62.77	2.57	24.23**
12	28.88	< .001	41.54	45.06	73.77	3.51	32.22**

หมายเหตุ $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่ม

- หัวข้อเหล่านี้สามารถใช้ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรจัดกลุ่มในการวิเคราะห์ข้อมูลได้
  - ปฏิสัมพันธ์ระหว่างลักษณะและการรักษา (Aptitude-Treatment Interaction) ที่เชื่อว่าผลของการรักษาขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของผู้เข้าร่วมการทดลองเริ่มต้น
  - การตรวจสอบอคติในการทำนาย (Predictive bias) ที่ต้องการทดสอบว่าสมการทำนายระหว่างตัวทำนายและผลลัพธ์ไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

- อีกกรณีหนึ่ง คือ X เป็นตัวแปรกำกับของอิทธิพลจาก X ไปหา Y
- กล่าวคือ X เป็นตัวแปรกำกับอิทธิพลของตนเอง

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X + b_2X + b_3XX = b'_0 + b'_1X + b'_2X^2$$

- รูปแบบนี้ คือ การเปลี่ยนแปลงของ X ในรูปของสมการพหุนาม
- การทดสอบว่าการเปลี่ยนแปลงอยู่ในรูปของสมการกำลังสองหรือไม่ สามารถทดสอบโดยตรวจว่า b'_2 แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ หรือตรวจสอบ ΔR^2 เมื่อใส่ X^2 เข้าไป

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

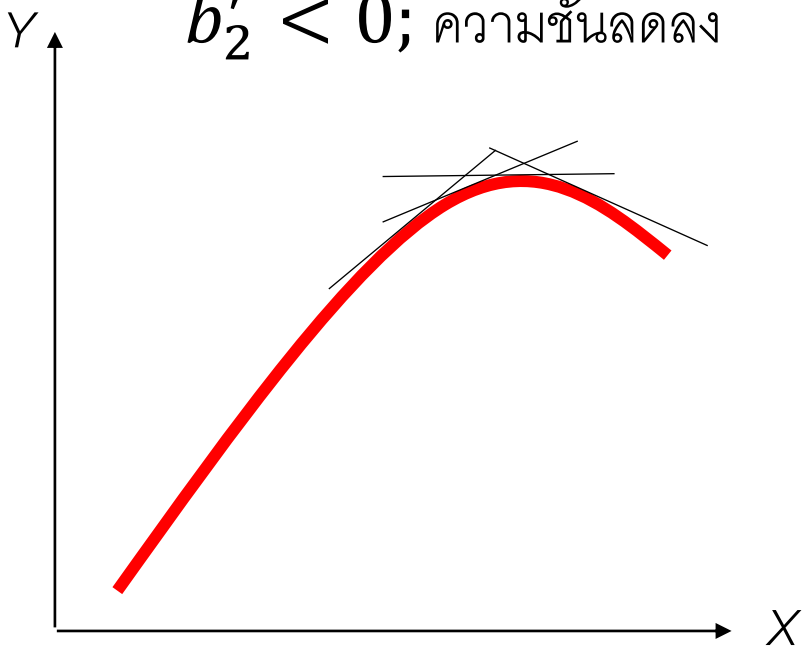
$$\hat{Y} = b'_0 + b'_1 X + b'_2 X^2$$

- b'_0 คือ ค่าของ Y เมื่อ $X = 0$
- b'_1 คือ ความชันของ X ไปหา Y เมื่อ $X = 0$
- b'_2 คือ ค่าความชันของ X ไปหา Y เปลี่ยนแปลงไป เมื่อ X เพิ่มขึ้น 1 หน่วย

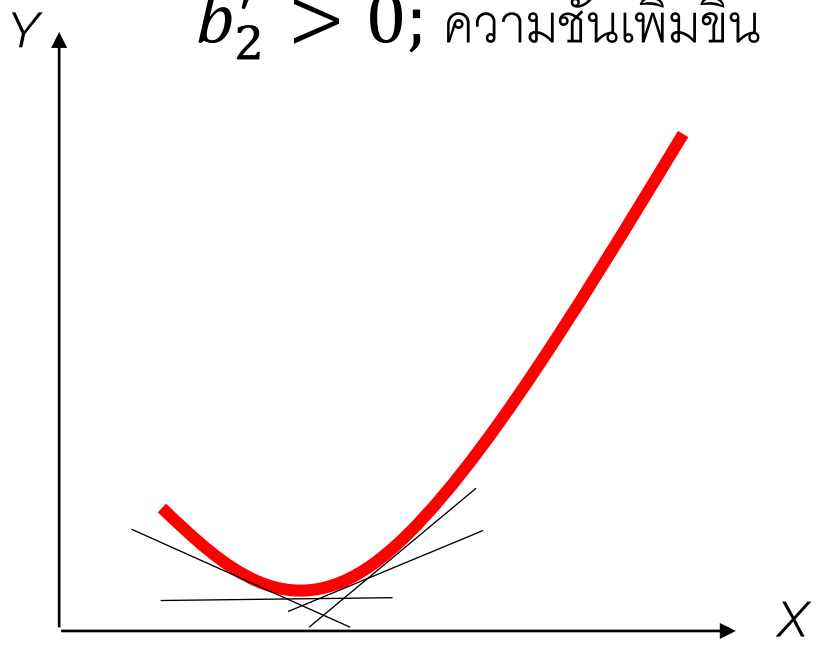
การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

$$\hat{Y} = b_0' + b_1' X + b_2' X^2$$

$b_2' < 0$; ความชันลดลง



$b_2' > 0$; ความชันเพิ่มขึ้น



ความชันของเส้นสีดำ คือ ความชันของ X ที่จุดสัมผัส หรือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y ที่จุดใดจุดหนึ่งของ X (Instantaneous Rate of Change)

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

- หาความชันของ X ที่จุดใดจุดหนึ่งของ X

$$\frac{d\hat{Y}}{dX} = \frac{d}{dX}(b_0' + b_1'X + b_2'X^2) = b_1' + 2b_2'X$$

- ดังนั้น ค่า $b_1' + 2b_2'X$ ถือว่าเป็นความชันย่อยในแต่ละค่าของ X
- จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด จะมีความชันเท่ากับ 0 ดังนั้นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดคือ

$$b_1' + 2b_2'X_M = 0 \rightarrow X_M = \frac{-b_1'}{2b_2'}$$

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

- ที่ผ่านมา คือ สมการพหุนามกำลังสอง คุณสามารถเพิ่มกำลังของ X ไปได้เรื่อยๆ แต่การแปลความหมายจะยิ่งยากขึ้น
  - X^2 การเปลี่ยนแปลงมีส่วนโค้ง 1 ครั้ง
  - X^3 การเปลี่ยนแปลงมีส่วนโค้ง 2 ครั้ง
  - X^n การเปลี่ยนแปลงมีส่วนโค้ง $n - 1$ ครั้ง
- นักวิจัยใส่สมการพหุนามกำลังสูงสุดที่คาดว่าจะมี แล้วค่อยๆ ลดกำลังลง โดยทดสอบว่า ΔR^2 แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่
  - หากไม่แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ ลดกำลังลง
  - หากแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ แปลความหมาย

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

- การเปลี่ยนศูนย์กลาง จะทำให้แปลความหมายของจุดตัดแกน Y ได้ และหาค่าความชันตำแหน่ง X ที่ต้องการได้ (พร้อมทั้งทดสอบค่าความชันดังกล่าว ว่าแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่) โดยไม่ต้องผ่านสูตร $b_1' + 2b_2'X$
- แต่ไม่ได้ส่งผลต่อการทดสอบกำลังสูงสุดของสมการพหุนาม

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

ผู้วิจัยต้องการทดสอบความถี่ของโฆษณาที่ทำให้เกิดความกลัวต่อความถี่ในการสูบบุหรี่

$\alpha = .05$

จัดผู้ร่วมการทดลอง 50 คน ได้รับความถี่ในการโฆษณาดังกล่าวแตกต่างกัน ระหว่างการใช้อินเทอร์เนต

สมมติฐาน คือ ความถี่ของโฆษณาที่ทำให้เกิดความกลัว มีผลในการลดบุหรี่อยู่ในรูปเส้นโค้ง

H_0: ไม่มีความสัมพันธ์แบบสมการพหุนามกำลังสอง

H_1: มีความสัมพันธ์แบบสมการพหุนามกำลังสอง

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

```
> ex4 <- read.table("lecture3ex4.csv", sep=",", header=TRUE)
> describe(ex4)
           vars  n  mean   sd median trimmed  mad  min   max range  skew kurtosis   se
fearprob      1 50  0.59 0.28   0.61     0.6 0.32 0.01  0.99  0.98 -0.36    -0.95 0.04
cigarette     2 50 14.26 6.94  15.00    14.2 5.93 0.00 36.00 36.00  0.23     0.56 0.98
> corr.test(ex4)
Call:corr.test(x = ex4)
Correlation matrix
           fearprob cigarette
fearprob       1.00     -0.59
cigarette     -0.59      1.00
Sample Size
[1] 50
Probability values (Entries above the diagonal are adjusted for multiple tests.)
           fearprob cigarette
fearprob          0         0
cigarette         0         0

 To see confidence intervals of the correlations, print with the short=FALSE option
```

```
> out4 <- lm(cigarette ~ fearprob, data=ex4)
> summary(out4)

Call:
lm(formula = cigarette ~ fearprob, data = ex4)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.0786  -3.2576  -0.7166   2.7475  13.2565

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   22.897      1.898  12.067 3.82e-16 ***
fearprob     -14.699      2.926  -5.024 7.44e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '

Residual standard error: 5.679 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3446,    Adjusted R-squared:  0.3309
F-statistic: 25.24 on 1 and 48 DF,  p-value: 7.436e-06
```

$R^2 = .34, F(1, 48) = 25.24, p < .001$

```
> out4a <- lm(cigarette ~ fearprob + I(fearprob^2), data=ex4)
> summary(out4a)

Call:
lm(formula = cigarette ~ fearprob + I(fearprob^2), data = ex4)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.6048  -3.8607   0.4359   3.3665   9.0118

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    29.920      2.645  11.311 5.18e-15 ***
fearprob      -50.608     10.650  -4.752 1.94e-05 ***
I(fearprob^2)  33.467      9.617   3.480  0.00109 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.117 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4789,    Adjusted R-squared:  0.4567
F-statistic:  21.6 on 2 and 47 DF,  p-value: 2.228e-07
```

$R^2 = .48, F(2, 47) = 21.60, p < .001$

```
> anova(out4, out4a)
Analysis of Variance Table

Model 1: cigarette ~ fearprob
Model 2: cigarette ~ fearprob + I(fearprob^2)
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1     48 1547.8
2     47 1230.7  1    317.12 12.111 0.001093 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ความกลัวกำลังสองสามารถทำนายได้เพิ่มขึ้น 13%
ซึ่งแตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

```
> out4a <- lm(cigarette ~ fearprob + I(fearprob^2), data=ex4)
> summary(out4a)

Call:
lm(formula = cigarette ~ fearprob + I(fearprob^2), data = ex4)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.6048  -3.8607   0.4359   3.3665   9.0118

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    29.920      2.645  11.311 5.18e-15 ***
fearprob      -50.608     10.650  -4.752 1.94e-05 ***
I(fearprob^2)  33.467      9.617   3.480  0.00109 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.117 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4789,    Adjusted R-squared:  0.4567
F-statistic:  21.6 on 2 and 47 DF,  p-value: 2.228e-07
```

$$\hat{Y} = 29.92 - 50.61X + 33.47X^2$$

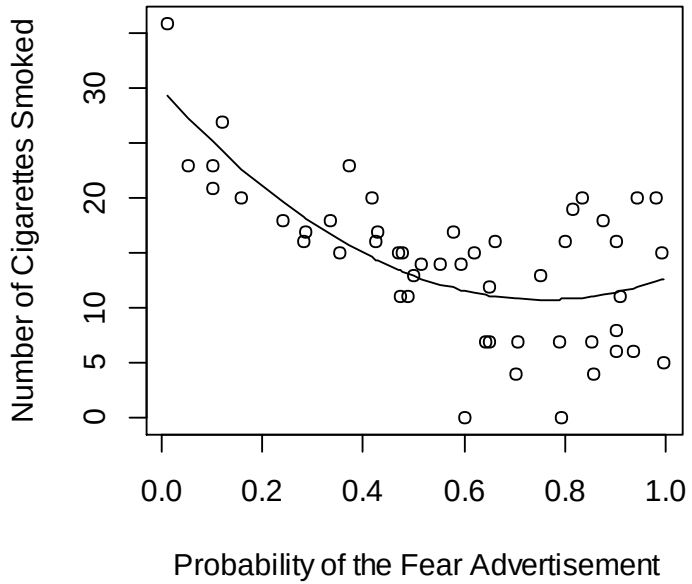
เมื่อมีโฆษณาเน้นความกลัว 0% การสูบบุหรี่อยู่ที่ 29.92 มวน

การเพิ่มขึ้นโฆษณา 100% (ที่ตำแหน่ง 0%) จะลดการสูบบุหรี่ได้ 50.61 มวน

ความแตกต่างระหว่างความชันของโฆษณาที่ 0% และ 100% อยู่ที่ 33.47 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงแบบพหุนามกำลังสอง อธิบายการสูบบุหรี่ได้อย่างมีนัยสำคัญ

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

```
> with(ex4, plot(fearprob, cigarette, xlab="Probability of the Fear Advertisement", ylab="Number of Cigarettes Smoked"))
> myorder <- order(ex4[,"fearprob"])
> yhat <- predict(out4a)
> lines(ex4[myorder,"fearprob"], yhat[myorder])
```



ทดสอบความชัน เมื่อสัดส่วนโฆษณาก่อให้เกิดความกลัวเท่ากับ 20%

```
> out4a2 <- lm(cigarette ~ I(fearprob - 0.2) + I((fearprob - 0.2)^2), data=ex4)
> summary(out4a2)

Call:
lm(formula = cigarette ~ I(fearprob - 0.2) + I((fearprob - 0.2)^2),
    data = ex4)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.6048  -3.8607   0.4359   3.3665   9.0118

Coefficients:
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           21.138      1.297  16.293  < 2e-16 ***
I(fearprob - 0.2)    -37.221      6.988  -5.326 2.77e-06 ***
I((fearprob - 0.2)^2)  33.467      9.617   3.480  0.00109 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.117 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4789,    Adjusted R-squared:  0.4567
F-statistic:  21.6 on 2 and 47 DF,  p-value: 2.228e-07
```

เมื่อมีโฆษณาเน้นความกลัว 20% การสูบบุหรี่อยู่ที่ 21.14 มวน

การเพิ่มขึ้นโฆษณา 100% (ที่ตำแหน่ง 20%) จะลดการสูบบุหรี่ได้ 37.22 มวน

ทดสอบความชัน เมื่อสัดส่วนโฆษณาก่อให้เกิดความกลัวเท่ากับ 70%

```
> out4a7 <- lm(cigarette ~ I(fearprob - 0.7) + I((fearprob - 0.7)^2), data=ex4)
> summary(out4a7)

Call:
lm(formula = cigarette ~ I(fearprob - 0.7) + I((fearprob - 0.7)^2),
    data = ex4)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.6048  -3.8607   0.4359   3.3665   9.0118

Coefficients:
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          10.8939     0.9241  11.788 1.22e-15 ***
I(fearprob - 0.7)    -3.7540     4.1040  -0.915  0.36501
I((fearprob - 0.7)^2) 33.4669     9.6167   3.480  0.00109 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.117 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4789,    Adjusted R-squared:  0.4567
F-statistic:  21.6 on 2 and 47 DF,  p-value: 2.228e-07
```

เมื่อมีโฆษณาเน้นความกลัว 70% การสูบบุหรี่อยู่ที่ 10.89 มวน

การเพิ่มขึ้นโฆษณา 100% (ที่ตำแหน่ง 70%) จะลดการสูบบุหรี่ได้ 3.75 มวน

การเปลี่ยนแปลงตามสมการพหุนาม

- ความชันย่อย

$$= -50.608 + 2(33.467)X$$

สัดส่วนโฆษณา	จำนวนมวนที่สูบ
.0	-50.61
.2	-37.22
.4	-23.83
.6	-10.45
.8	2.94
1.0	16.33

สัดส่วนโฆษณาที่ทำให้จำนวนมวนที่สูบน้อยที่สุด

$$= \frac{-b_1'}{2b_2'} = \frac{-(-50.608)}{2 \cdot 33.467} = .76$$

ดังนั้น สัดส่วนโฆษณาที่ทำให้จำนวนมวนที่สูบน้อยที่สุดที่แท้จริงคือ 76%

การเขียนรายงาน

- งานวิจัยนี้ ต้องการทดสอบผลของการโฆษณาให้เกิดความกลัวการสูบบุหรี่ ต่อจำนวนการสูบบุหรี่ต่อวัน โดยเชื่อว่าการโฆษณาสูงปานกลางจะทำให้คนตระหนักอันตรายของการสูบบุหรี่ แต่การโฆษณามากเกินไป จะทำให้คนปฏิเสธรับสารดังกล่าว แล้วไม่ได้ลดการสูบบุหรี่ กล่าวคือ ความถี่การโฆษณามีผลแบบเส้นโค้งต่อจำนวนการสูบบุหรี่ต่อวัน
- ตารางที่ 8 แสดงสถิติพรรณนาของตัวแปรทั้งหมด จากการวิเคราะห์ถดถอยแบบลำดับขั้นพบผลดังตารางที่ 9 โดยผลกำลังสองของโฆษณาถึงระดับนัยสำคัญ, $\Delta R^2 = .13$, $F(1, 47) = 12.11$, $p = .001$, ภาพที่ 4 แสดงลักษณะความสัมพันธ์ โดยความถี่การโฆษณาที่ทำให้การลดบุหรี่ได้ผลมากที่สุด คือ โฆษณา 76%

การเขียนรายงาน

ตารางที่ 8 แสดงค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, และค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในการวิเคราะห์

ตัวแปร	1	2
1. จำนวนมวนสูบบุหรี่ต่อวัน		
2. ความถี่ของโฆษณาขู่ให้กลัว	-.587**	
M	14.26	.59
SD	6.94	.28

หมายเหตุ *$p < .05$, **$p < .01$

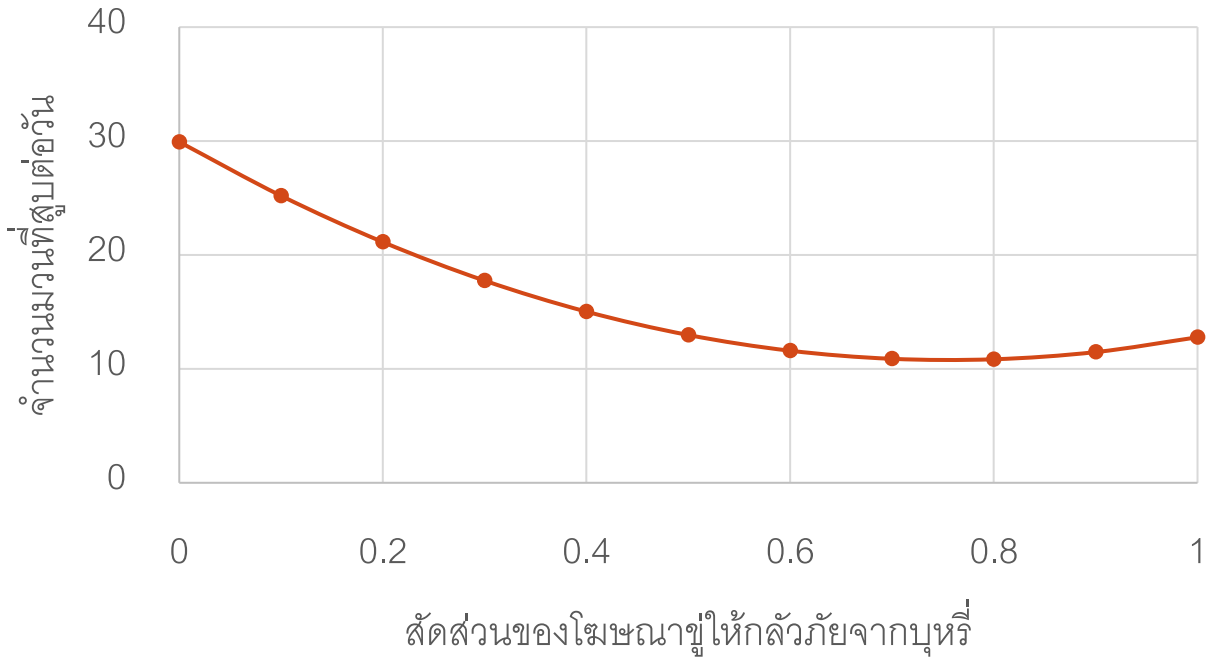
การเขียนรายงาน

ตารางที่ 9 แสดงผลการวิเคราะห์ถดถอยในการทำนายจำนวนมวนสูบบุหรี่ต่อวัน

ตัวแปร	*b*
(จุดตัด)	21.14**
ความถี่ของโฆษณาขู่ให้กลัว	-37.22**
(ความถี่ของโฆษณาขู่ให้กลัว)^2	33.47**
R^2	.479**

หมายเหตุ *$p < .05$, **$p < .01$, ความถี่ของโฆษณาขู่ให้กลัว ถูกเปลี่ยนศูนย์กลางให้อยู่ที่ .2

การเขียนรายงาน



ภาพที่ 4 แสดงเส้นสมการถดถอยในการทำนายสัดส่วนของโฆษณาขู่ให้กลัวภัยจากบุหรี่ต่อจำนวนมวนบุหรี่ที่สูบต่อวัน

ข้อตกลงเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติ

1. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามเป็นเส้นตรง
2. คะแนนของแต่ละคนที่ได้ จะต้องเป็นอิสระจากกัน
3. การกระจายของค่าความผิดพลาดต้องไม่เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ
4. ค่าความผิดพลาดมีการกระจายเป็นโค้งปกติ
5. ไม่มีความสัมพันธ์แบบมีอิทธิพลซึ่งกันและกัน (Reciprocal Relationship)
6. ตัวแปรอิสระไม่มีความผิดพลาดในการวัด (Measurement Error)
7. ตัวแปรสาเหตุร่วมทั้งหมด ต้องอยู่ในการวิเคราะห์

ข้อตกลงเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติ

ข้อตกลงเบื้องต้นหากละเมิด	มีผลต่อ *b*	มีผลต่อ *SE*(*b*)
Linearity	✓	✓
Independent Observations	✗	✓
Homoscadasticity	✗	✓
Normality in Errors	✗	✓
No Reciprocal Relationship	✓	✓
No Measurement Error in IV	✓	✓
No Common Causes	✓	✓

ข้อตกลงเบื้องต้น	ตรวจสอบโดย	แก้ไขโดย
Linearity	A, B, C, R^2 ที่เพิ่มขึ้นเมื่อใส่ IV ที่แสดงถึงความสัมพันธ์เส้นโค้ง	ใส่ IV ที่แสดงถึงความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง
Independent Observations	ตรวจสอบงานวิจัยว่าไม่ได้มีกลุ่มร่วมกัน หรือเกิดจากการวัดระยะยาว	ใช้ Multilevel Modeling หรือ Time Series Analysis
Homoscadasticity	A, B, C	แปลง (Transformation) ค่าของ IV หรือใช้สถิติสำหรับการกระจายตัวแปรตามรูปแบบอื่น
Normality in Errors	Normal q-q plot ของค่า Errors	แปลง (Transformation) ค่าของ IV หรือใช้สถิติสำหรับการกระจายตัวแปรตามรูปแบบอื่น
No Reciprocal Relationship	ตรวจสอบเชิงทฤษฎี	ใช้ Structural Equation Modeling โดยเฉพาะอย่างยิ่งใช้โมเดลระยะยาว (Maxwell et al., 2004)
No Measurement Error in IV	ตรวจสอบความเที่ยง (Reliability) (ถ้ามี)	ใช้ Structural Equation Modeling
No Common Causes	ตรวจสอบเชิงทฤษฎี	ใส่เข้าไปในโมเดลการวิเคราะห์

A = Scatterplot ระหว่าง Predicted Values และ Errors

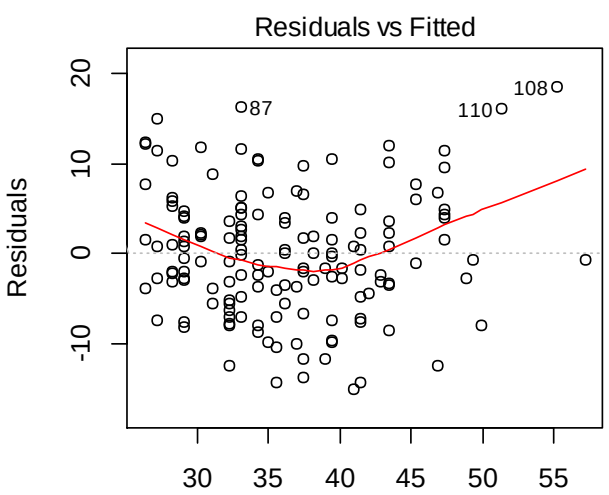
B = Scatterplot ระหว่างค่า IV แต่ละตัว และ Errors

C = Scatterplot ระหว่างค่า IV แต่ละตัว และ DV

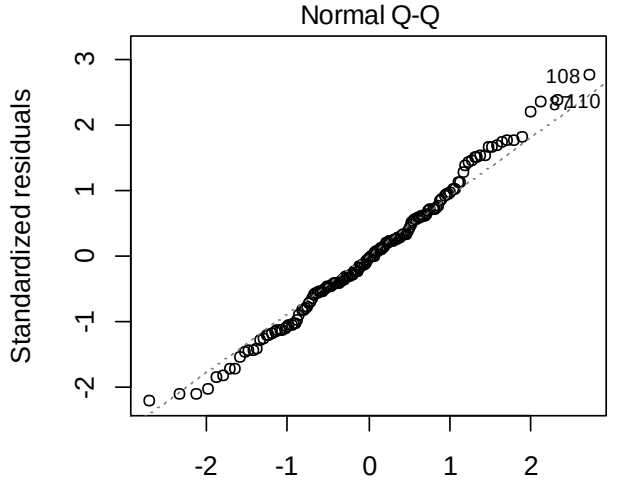
ข้อตกลงเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติ

- ตรวจสอบกราฟต่างๆ ได้ โดยใช้คำสั่ง plot กับผลการวิเคราะห์
- สำหรับรายละเอียด ดูเพิ่มเติมได้จาก https://www.statmethods.net/stats/rdiagnostics.html

```
> plot(out3)
```

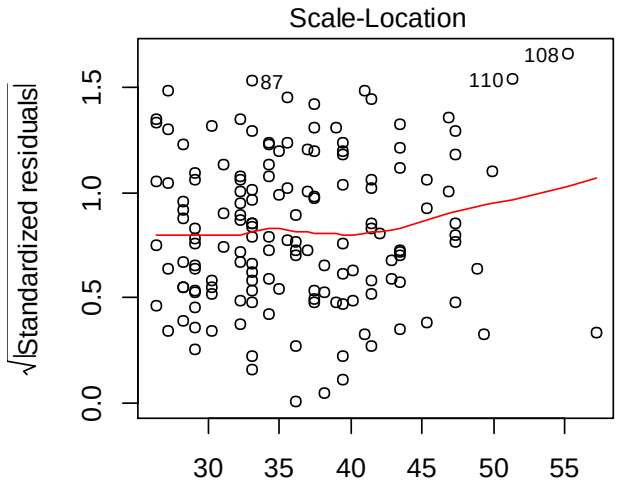


อาจมีความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง

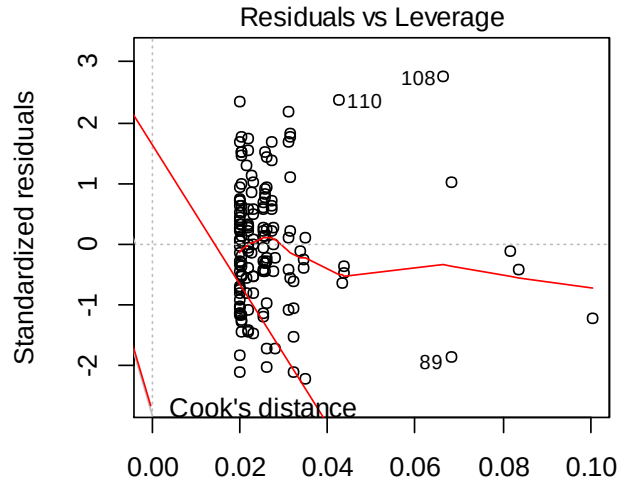


Errors เป็นโค้งปกติ

โมเดลนี้ไม่ถูกต้องตั้งแต่ต้น เพราะไม่ได้ใส่ปฏิสัมพันธ์



ไม่มีปัญหา Homoscedasticity



ตรวจสอบค่า outliers

การวัดค่าสุดโต่ง

- Distance เป็นการตรวจสอบว่าค่าความผิดพลาด (errors/residuals) ในการทำนาย มีค่าสูงต่ำเพียงใด
- Leverage เป็นการตรวจสอบว่าค่าของตัวแปรอิสระห่างออกจากค่าเฉลี่ยมากเพียงใด
- Influence เป็นการตรวจสอบว่า หากนำ case ดังกล่าวออกไปแล้ว ผลการวิเคราะห์เปลี่ยนแปลงอย่างไรบ้าง
- ดู https://www.statmethods.net/stats/rdiagnostics.html สำหรับวิธีการหา

คาบต่อไป

- เริ่มการวิเคราะห์พหุระดับ
- ส่งการบ้านที่ 2

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + e_j$$

- X = GRE; Y = GPA

$$Y_j = 2.1 + 0.0025 X_i + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + e_j$$

- X = จำนวนชั่วโมงในการดูโทรทัศน์; Y = คะแนนความก้าวร้าวในห้องเรียน

$$Y_j = 3.5 + 2X_j + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + e_j$$

- X = จำนวนครั้งที่อาจารย์พูดคำว่า “เยี่ยม” ในห้องเรียน; Y = ประสิทธิภาพในการสอน

$$Y_j = 3.2 + 0.005 X_j + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + e_j$$

- X_1 = GRE-Verbal; X_2 = GRE-Quant; Y = GPA

$$Y_j = 1.5 + 0.0015 X_{1j} + 0.0012 X_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + e_j$$

- X_1 = จำนวนชั่วโมงในการดูโทรทัศน์เนื้อหาก้าวร้าว; X_2 = จำนวนชั่วโมงในการดูโทรทัศน์เนื้อหาสารคดี; Y = คะแนนความก้าวร้าวในห้องเรียน

$$Y_j = 4 + 1.5X_{1j} - 0.8X_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + e_j$$

- X_1 = จำนวนครั้งที่อาจารย์พูดคำว่า “เยี่ยม” ในห้องเรียน; X_2 = สัดส่วนจำนวนครั้งที่อาจารย์ใส่ชุดสีขาว (0 = ไม่เคย, 1 = ทุกครั้ง); Y = ประสิทธิภาพในการสอน

$$Y_j = 3.5 + 0.004X_{1j} - 0.008X_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + e_j$$

- D_1 = มหาวิทยาลัยเอกชน (vs. รัฐบาล); Y = GPA

$$Y_j = 3.1 + 0.35 D_{1j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + e_j$$

- D_1 = เป็นลูกบุญธรรม (vs. ไม่ได้เป็น); Y = คะแนนความก้าวร้าวในห้องเรียน

$$Y_j = 3.3 + 0.1 D_{1j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + e_j$$

- D_1 = ครูที่ถูกบรรจุเป็นข้าราชการ (vs. ไม่ได้ถูกบรรจุ); Y = ประสิทธิภาพในการสอน

$$Y_j = 4 - 0.25 D_{1j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + e_j$$

- D_1 = กลุ่มทดลอง (vs. กลุ่มควบคุม); Y = เวลาที่ใช้ในการตอบสนองสิ่งเร้า

$$Y_j = 10 - 2.5 D_{1j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + e_j$$

- D_1 = คนต่างชาติพ่อแม่พูดอังกฤษ; D_2 = คนต่างชาติพ่อแม่พูดภาษาอื่น (vs. คนไทย); Y = GPA

$$Y_j = 3.3 - 0.3 D_{1j} - 0.05 D_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + e_j$$

- D_1 = หมู่ที่ 1; D_2 = หมู่ที่ 2 (vs. หมู่ที่ 3); Y = คะแนนความก้าวร้าวในห้องเรียน

$$Y_j = 3 + 1.5 D_{1j} + 0.2 D_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0, β_1, และ β_2 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + e_j$$

- D_1 = เสียงน่ารำคาญ; D_2 = เพลง Mozart (vs. ห้องเงียบ); Y = เวลาที่ใช้ในเขาวงกต

$$Y_j = 35 + 20D_{1j} - 10D_{2j} + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + \beta_3 X_j + e_j$$

- D_1 = คนต่างชาติพ่อแม่พูดอังกฤษ; D_2 = คนต่างชาติพ่อแม่พูดภาษาอื่น (vs. คนไทย); X = IQ; Y = GPA

$$Y_j = 2.1 - 0.3 D_{1j} - 0.1 D_{2j} + 0.002 X_j + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2,$ และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + \beta_3 \left(X_j - \bar{X}\right) + e_j$$

- D_1 = หมู่ที่ 1; D_2 = หมู่ที่ 2 (vs. หมู่ที่ 3); X = อายุของเด็ก; Y = คะแนนความก้าวร้าวในห้องเรียน

$$Y_j = 0.5 + 1.5 D_{1j} + 0.2 D_{2j} + 0.15 \left(X_j - \bar{X}\right) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + \beta_3 F_j + e_j$$

- D_1 = เสียงน่ารำคาญ; D_2 = เพลง Mozart (vs. ห้องเงียบ); *F* = หนูเพศผู้ (vs. เพศเมีย); *Y* = เวลาที่ใช้ในเขาวงกต

$$Y_j = 35 + 20D_{1j} - 9D_{2j} - 0.5F_j + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2,$ และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \beta_2 Z_j + \beta_3 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

- X = ความรู้สึกรักของสามี; Z = ความรู้สึกรักของภรรยา; Y = เวลาที่ใช้ร่วมกัน;.

$$Y_j = 30 + 2X_j + 3Z_j + 0.5(X_j \cdot Z_j) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2,$ และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \beta_2 Z_j + \beta_3 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

- X = ความยาวของบทความที่ให้อ่าน; Z = บุคลิกภาพความต้องการการกระตุ้นทางปัญญา (Need for Cognition); Y = แนวโน้มจะเชื่อบทความ

$$Y_j = 50 + 2\, X_j - 0.001 Z_j + 10 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \beta_2 Z_j + \beta_3 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

- X = แต่งหน้าสวย (1 = แต่งสวย, 0 = ไม่แต่งสวย); Z = แต่งตัวสวย (1 = แต่งสวย, 0 = ไม่แต่งสวย); Y = ความน่าดึงดูด.

$$Y_j = 40 + 10 X_j + 10 Z_j + 20 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2,$ และ β_3 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \beta_2 Z_j + \beta_3 (X_j \cdot Z_j) + e_j$$

- X = ความเครียด; Z = เคยฝึกสมาธิหรือไม่ (1 = ใช่, 0 = ไม่ใช่); Y = ระดับการรู้ตัวในสถานการณ์คับขัน

$$Y_j = 60 - 2X_j + 10Z_j + 1.5(X_j \cdot Z_j) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4,$ และ β_5 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_{1j} + \beta_2 D_{2j} + \beta_3 Z_j + \beta_4 (D_{1j} \cdot Z_j) + \beta_5 (D_{2j} \cdot Z_j) + e_j$$

- D_1 = เพื่อนสนิทเป็นคนชวน; D_2 = คนรู้จักเป็นคนชวน (vs. คนแปลกหน้าเป็นคนชวน); Z = เพศ (1 = หญิง, 0 = ชาย); Y = แนวโน้มจะดื่มสุรา

$$Y_j = 30 + 20 D_{1j} + 40 D_{2j} - 10 Z_j - 5 (D_{1j} \cdot Z_j) - 20 (D_{2j} \cdot Z_j) + e_j$$

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- β_0 และ β_1 แต่ละสมการหมายความว่าอะไร

(1) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + e_j$$

(2) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 \left(X_j - 400\right) + e_j$$

(3) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 \left(X_j - \bar{X}_.\right) + e_j$$

- X = GRE; Y = GPA

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1,$ และ β_2 แต่ละสมการหมายความว่าอะไร

(1) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + e_j$$

(2) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 \left(X_{1j} - 400\right) + \beta_2 \left(X_{2j} - 600\right) + e_j$$

(3) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 \left(X_{1j} - \bar{X}_{1.}\right) + \beta_2 \left(X_{2j} - 600\right) + e_j$$

(4) $$Y_j = \beta_0 + \beta_1 \left(X_{1j} - \bar{X}_{1.}\right) + \beta_2 \left(X_{2j} - \bar{X}_{2.}\right) + e_j$$

- X_1 = GRE-Verbal; X_2 = GRE-Quant; *Y* = GPA

แบบฝึกหัดการแปลความหมาย

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4,$ และ β_5 หมายความว่าอะไร

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 D_j + \beta_2 F_j + \beta_3 (Z_j - 40) + \beta_4 (D_j \cdot F_j) + \beta_5 \left(D_j \cdot (Z_j - 40)\right) + e_j$$

- D = การดื่มมะนาวโซดา (1 = ดื่ม, 0 = ไม่ดื่ม); F = เพศ (1 = หญิง, 0 = ชาย); Z = อายุ; Y = อาการปวดหลัง

$$Y_j = 20 + 0.2 D_j + 10 F_j + 0.5 (Z_j - 40) + 0.04 (D_j \cdot F_j) + 0.002 \left(D_j \cdot (Z_j - 40)\right) + e_j$$