โมเดลจุดตัดแบบสุ่ม (Random Intercept Model)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- โมเดลว่าง (Null Model)
- โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์ (Mean-as-Outcome Model)
- โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบสุ่ม (Random Analysis of Covariance Model)
- โมเดลจุดตัดแบบสุ่ม (Random Intercept Model)
- อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

โมเดลว่าง

- ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงซ้อนด้วยการวิเคราะห์ถดถอยปกติ จะเกิดปัญหาความผิดพลาดสัมพันธ์กัน (Correlated Errors)
  - เช่น นักเรียนที่อยู่ในโรงเรียนเดียวกัน จะมีคะแนนไปในทิศทางเดียวกัน
- การวิเคราะห์ถดถอยจะต้องถูกปรับปรุงเพื่อสะท้อนให้เห็นว่า นักเรียนคนใดบ้างที่อยู่ในโรงเรียนเดียวกัน เพื่อให้แก้ปัญหาความผิดพลาดสัมพันธ์กัน

โมเดลว่าง

- สมมติทำนายข้อมูลนักเรียนทั้งหมดจำนวน *N* คน จาก *K* โรงเรียนด้วยค่าเฉลี่ยรวมนักเรียนทุกคน

$$Y_{ij} = \mu_{..} + r_{ij}$$

- Y_{ij} คือ คะแนนของนักเรียนคนที่ *i* ในโรงเรียนที่ *j*
- $\mu_{..}$ คือ ค่าเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมด ไม่ว่าจะอยู่ในโรงเรียนใดก็ตาม
- r_{ij} คือ ค่าความผิดพลาดในการทำนายคะแนนของนักเรียนคนที่ *i* ในโรงเรียนที่ *j* ด้วยค่าเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมด

โมเดลว่าง

- แน่นอน การทำนายคะแนนนักเรียนด้วยค่าเฉลี่ยทั้งหมดนั้นไม่ค่อยแม่นยำ หากท่านสามารถทำนายด้วยค่าเฉลี่ยของนักเรียนภายในแต่ละโรงเรียนจะแม่นยำกว่า

$$Y_{ij} = \mu_{.j} + e_{ij}$$

- $\mu_{.j}$ คือ ค่าเฉลี่ยของนักเรียนภายในโรงเรียนที่ *j*
- e_{ij} คือ ค่าความผิดพลาดในการทำนายคะแนนของนักเรียนคนที่ *i* ในโรงเรียนที่ *j* จากค่าเฉลี่ยของโรงเรียนที่ *j*

โมเดลว่าง

เปลี่ยนสัญลักษณ์ให้คล้าย
การวิเคราะห์ถดถอย

$$Y_{ij} = \mu_{.j} + e_{ij} \longrightarrow Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$

แยกดูทีละโรงเรียน

ในโรงเรียนที่ *j* : $Y_i = \beta_0 + e_i$

- สมการนี้ แท้จริงแล้วก็คือสมการวิเคราะห์ถดถอยของโรงเรียนที่ *j*
- ถ้ามีโรงเรียนจำนวน *K* โรงเรียน สมการวิเคราะห์ถดถอยจะมีจำนวน *K* สมการ

นักเรียน	โรงเรียน	คะแนนสอบ
1	1	6
2	1	4
3	1	4
4	2	7
5	2	8
6	2	8
7	3	6
8	3	7
9	3	5
10	4	10
11	4	9
12	4	7
13	5	9
14	5	6
15	5	8

การกระจายระหว่างโรงเรียน | การกระจายภายในโรงเรียน

$$
\begin{aligned}
Y_{1,1} &= \beta_{0,1} + e_{1,1} & 6.00 &= 4.67 + 1.33 \\
Y_{2,1} &= \beta_{0,1} + e_{2,1} & 4.00 &= 4.67 - 0.67 \\
Y_{3,1} &= \beta_{0,1} + e_{3,1} & 4.00 &= 4.67 - 0.67 \\
Y_{4,2} &= \beta_{0,2} + e_{4,2} & 7.00 &= 7.67 - 0.67 \\
Y_{5,2} &= \beta_{0,2} + e_{5,2} & 8.00 &= 7.67 + 0.33 \\
Y_{6,2} &= \beta_{0,2} + e_{6,2} & 8.00 &= 7.67 + 0.33 \\
Y_{7,3} &= \beta_{0,3} + e_{7,3} & 6.00 &= 6.00 + 0.00 \\
Y_{8,3} &= \beta_{0,3} + e_{8,3} & 7.00 &= 6.00 + 1.00 \\
Y_{9,3} &= \beta_{0,3} + e_{9,3} & 5.00 &= 6.00 - 1.00 \\
Y_{10,4} &= \beta_{0,4} + e_{10,4} & 10.00 &= 8.67 + 1.33 \\
Y_{11,4} &= \beta_{0,4} + e_{11,4} & 9.00 &= 8.67 + 0.33 \\
Y_{12,4} &= \beta_{0,4} + e_{12,4} & 7.00 &= 8.67 - 1.67 \\
Y_{13,5} &= \beta_{0,5} + e_{13,5} & 9.00 &= 7.67 + 1.33 \\
Y_{14,5} &= \beta_{0,5} + e_{14,5} & 6.00 &= 7.67 - 1.67 \\
Y_{15,5} &= \beta_{0,5} + e_{15,5} & 8.00 &= 7.67 + 0.33
\end{aligned}
$$

โมเดลว่าง

- อย่างไรก็ตาม ค่าเฉลี่ยของคะแนนในโรงเรียนที่ *j* (β_{0j}) สามารถแบ่งได้เพิ่มเติม

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

- γ_{00} คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากทุกโรงเรียน หรือค่าเฉลี่ยรวม (Grand Mean)
- u_{0j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยของโรงเรียนที่ *j* ออกจากค่าเฉลี่ยรวม
- ดังนั้นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนสามารถแบ่งได้ดังนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \longrightarrow Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + e_{ij}$$

นักเรียน	โรงเรียน	คะแนนสอบ
1	1	6
2	1	4
3	1	4
4	2	7
5	2	8
6	2	8
7	3	6
8	3	7
9	3	5
10	4	10
11	4	9
12	4	7
13	5	9
14	5	6
15	5	8

$$
\begin{aligned}
Y_{1,1} &= \gamma_{00} + u_{0,1} + e_{1,1} \\
Y_{2,1} &= \gamma_{00} + u_{0,1} + e_{2,1} \\
Y_{3,1} &= \gamma_{00} + u_{0,1} + e_{3,1} \\
Y_{4,2} &= \gamma_{00} + u_{0,2} + e_{4,2} \\
Y_{5,2} &= \gamma_{00} + u_{0,2} + e_{5,2} \\
Y_{6,2} &= \gamma_{00} + u_{0,2} + e_{6,2} \\
Y_{7,3} &= \gamma_{00} + u_{0,3} + e_{7,3} \\
Y_{8,3} &= \gamma_{00} + u_{0,3} + e_{8,3} \\
Y_{9,3} &= \gamma_{00} + u_{0,3} + e_{9,3} \\
Y_{10,4} &= \gamma_{00} + u_{0,4} + e_{10,4} \\
Y_{11,4} &= \gamma_{00} + u_{0,4} + e_{11,4} \\
Y_{12,4} &= \gamma_{00} + u_{0,4} + e_{12,4} \\
Y_{13,5} &= \gamma_{00} + u_{0,5} + e_{13,5} \\
Y_{14,5} &= \gamma_{00} + u_{0,5} + e_{14,5} \\
Y_{15,5} &= \gamma_{00} + u_{0,5} + e_{15,5}
\end{aligned}
$$

การกระจายระหว่างโรงเรียน การกระจายภายในโรงเรียน

$$
\begin{aligned}
6.00 &= 6.93 - 2.26 + 1.33 \\
4.00 &= 6.93 - 2.26 - 0.67 \\
4.00 &= 6.93 - 2.26 - 0.67 \\
7.00 &= 6.93 + 0.74 - 0.67 \\
8.00 &= 6.93 + 0.74 + 0.33 \\
8.00 &= 6.93 + 0.74 + 0.33 \\
6.00 &= 6.93 - 0.93 + 0.00 \\
7.00 &= 6.93 - 0.93 + 1.00 \\
5.00 &= 6.93 - 0.93 - 1.00 \\
10.00 &= 6.93 + 1.74 + 1.33 \\
9.00 &= 6.93 + 1.74 + 0.33 \\
7.00 &= 6.93 + 1.74 - 1.67 \\
9.00 &= 6.93 + 0.74 + 1.33 \\
6.00 &= 6.93 + 0.74 - 1.67 \\
8.00 &= 6.93 + 0.74 + 0.33
\end{aligned}
$$

โมเดลว่าง

- การกระจายของคะแนนสามารถแบ่งได้ดังต่อไปนี้

$$Var(Y_{ij}) = Var(\gamma_{00}) + Var(u_{0j}) + Var(e_{ij})$$

$$= \tau_{00} + \sigma^2$$

- τ_{00} = ในตัวอย่างนี้คือการกระจายของค่าเฉลี่ยระหว่างโรงเรียน
- σ^2 = ในตัวอย่างนี้คือการกระจายของคะแนนนักเรียน ภายในแต่ละโรงเรียน

โมเดลว่าง

- โดยค่าความสัมพันธ์ระหว่างชั้น (Intraclass Correlation) สามารถคำนวณได้โดย

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \sigma^2}$$

- โมเดลนี้ถือเป็นโมเดลพหุระดับที่ง่ายที่สุด ซึ่งบางครั้งจะเรียกว่าโมเดลว่าง (Empty Model, Null Model)

ระดับที่ 2 $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

ระดับที่ 1 $Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$

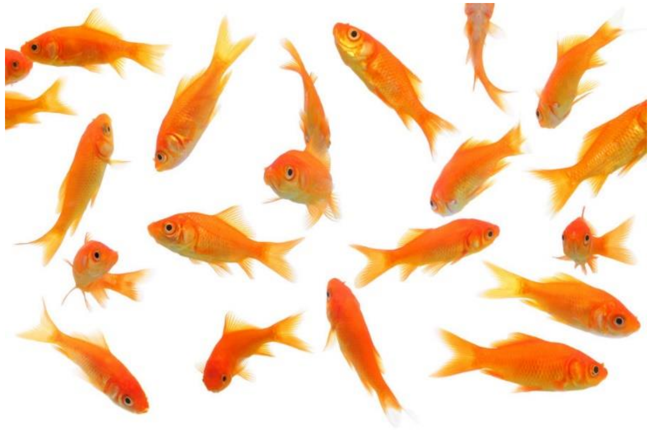
$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + e_{ij}$$

โมเดลว่าง

- โมเดลเปล่ามักถูกใช้เป็นโมเดลวิเคราะห์เริ่มต้น เนื่องจาก
  - หากค่าความสัมพันธ์ระหว่างชั้นมีค่าน้อยมากๆ เช่น .01 นักวิจัยอาจไปใช้สถิติระดับเดียว (เช่น การวิเคราะห์ถดถอย การวิเคราะห์ความแปรปรวน) เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของการวิเคราะห์พหุระดับ
  - ในการวิเคราะห์พหุระดับ โมเดลเปล่าจะเป็นโมเดลอ้างอิง เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบกับโมเดลอื่น เช่น การทดสอบผลของตัวแปรอิสระ อาจใช้โมเดลที่มีตัวแปรอิสระและโมเดลเปล่ามาเปรียบเทียบกัน แล้วดูว่าการใส่ตัวแปรอิสระสามารถอธิบายตัวแปรตามได้ดีขึ้นอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

โมเดลว่าง

ปริมาณอาหารที่ปลาทอง
แต่ละตัวกินในแต่ละตู้ปลา



สำรวจข้อมูลอาหารเม็ดที่ปลาทองกิน โดยเก็บจาก
ตู้ปลา 100 ตู้ รวมปลาทอง 811 ตัว

สร้างโมเดลเปล่าและหา ICC
ของปริมาณการกินอาหารเม็ด

โมเดลว่าง

ตัวแปร ID ระดับปลา

ตัวแปร ID ระดับตู้ปลา

ปริมาณอาหาร (เม็ด)

```
> dat1 <-read.table("lecture4ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> library(psych)
> describe(dat1)
          vars   n   mean     sd median trimmed    mad   min    max  range  skew kurtosis   se
id           1 811 406.00 234.26 406.00  406.00 300.97  1.00 811.00 810.00  0.00    -1.20 8.23
groupid      2 811  49.08  28.45  49.00   48.72  37.06  1.00 100.00  99.00  0.08    -1.17 1.00
consume      3 811  38.31   6.92  38.00   38.21   7.41 20.00  60.00  40.00  0.14    -0.32 0.24
goldcolor    4 811   0.51   0.50   1.00    0.52   0.00  0.00   1.00   1.00 -0.05    -2.00 0.02
length       5 811  14.07   5.01  14.12   14.10   6.49  3.17  24.33  21.16 -0.05    -1.16 0.18
volume       6 811   0.78   0.29   0.73    0.76   0.28  0.04   1.60   1.56  0.48     0.42 0.01
area         7 811   1.33   0.70   1.09    1.26   0.56  0.13   3.29   3.15  0.85    -0.09 0.02
height       8 811   0.66   0.20   0.67    0.66   0.25  0.30   0.98   0.68 -0.07    -1.24 0.01
nfish        9 811   8.99   2.65   9.00    8.89   2.97  2.00  15.00  13.00  0.27    -0.17 0.09
```

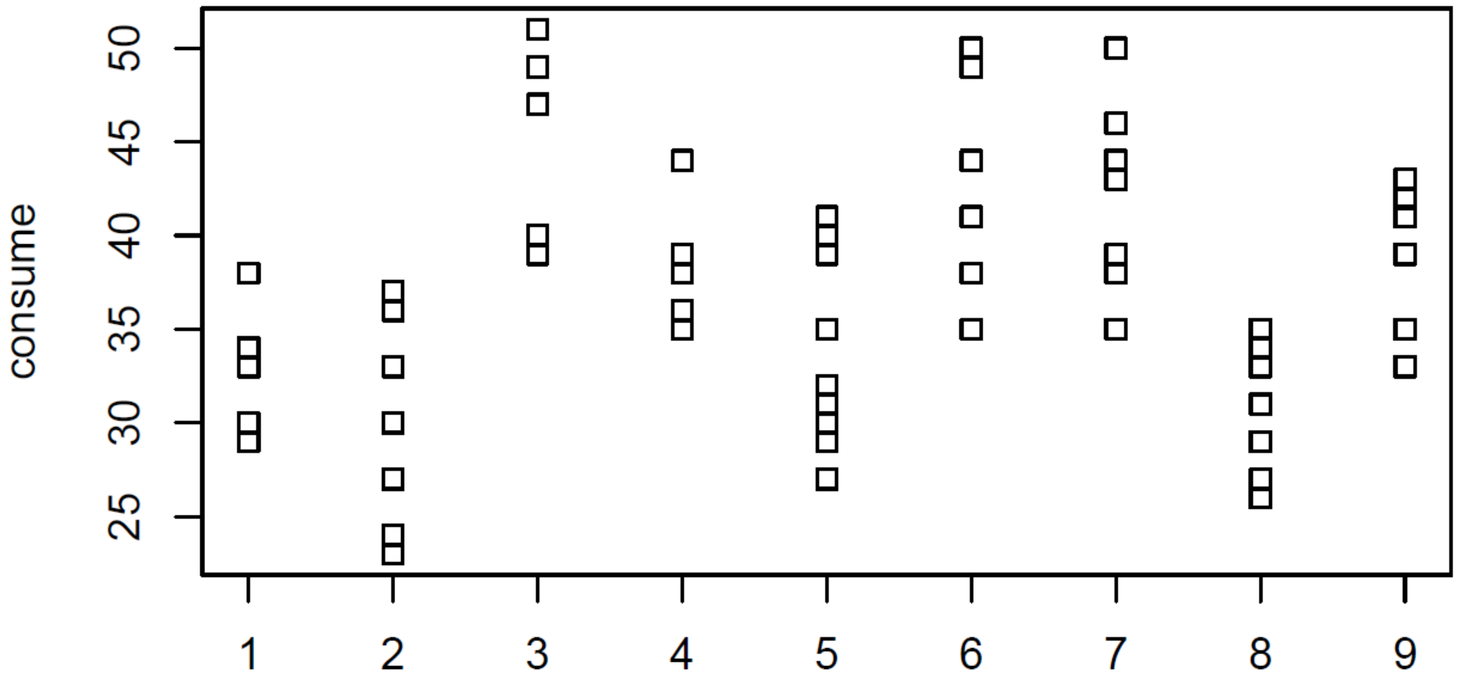
โมเดลว่าง

```
> aggregate(consume ~ groupid, data=dat1, FUN=mean)
   groupid  consume
1        1 33.00000
2        2 30.00000
3        3 45.50000
4        4 38.50000
5        5 35.41667
6        6 42.83333
7        7 43.12500
8        8 31.12500
9        9 38.66667
10      10 35.45455
11      11 25.14286
12      12 46.20000
13      13 39.66667
14      14 42.58333
15      15 35.50000
```

```
> aggregate(consume ~ groupid, data=dat1, FUN=range)
   groupid consume.1 consume.2
1        1        29        38
2        2        23        37
3        3        39        51
4        4        35        44
5        5        27        41
6        6        35        50
7        7        35        50
8        8        26        35
9        9        33        43
10      10        28        43
11      11        20        29
12      12        34        53
13      13        31        49
14      14        33        51
15      15        27        41
```

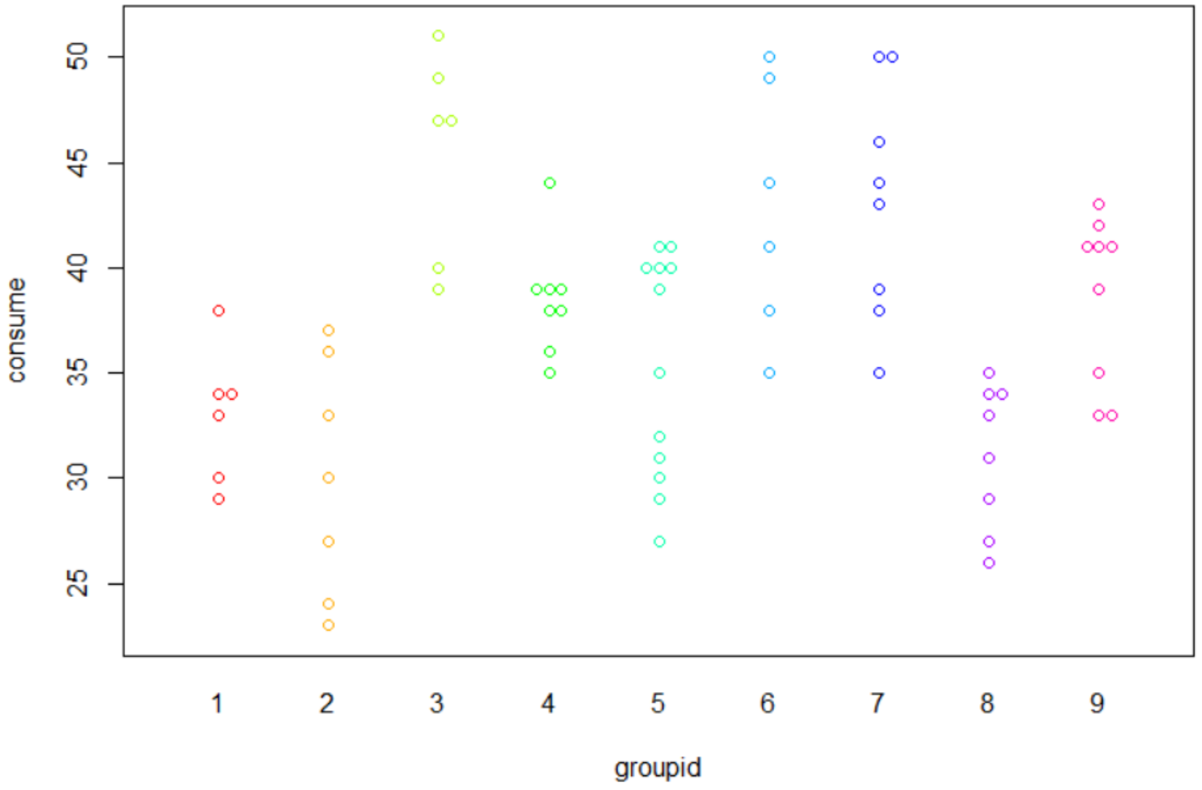
โมเดลว่าง

```
> stripchart(consume ~ groupid, vertical = TRUE, data = dat1[dat1$groupid < 10,])
```



โมเดลว่าง

```
> library(beeswarm)
> dat1_1 <- dat1[dat1$groupid < 10,]
> beeswarm(consume ~ groupid, data=dat1_1, col=rainbow(9))
```



```
> library(lme4)
> out1m0 <- lmer(consume ~ 1 + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1m0)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5120.1   5134.2  -2557.0   5114.1      808

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.52068 -0.71755  0.03949  0.68318  3.05112

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 24.04    4.903
 Residual             24.63    4.963
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  38.1562     0.5238   72.84
```

$$\rho = \frac{24.04}{24.04 + 24.63} = .49$$

$$\beta_{0j} = 38.16 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 24.04$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 24.63$$

$$\beta_{0j} = 38.16 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 24.04$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 24.63$$

ปลาทุกตัว ในทุกตู้ปลา กินอาหารปลาเฉลี่ย 38.16 เม็ดต่อวัน

ปลาในแต่ละตู้ปลา เฉลี่ยกินอาหารปลาอยู่ในช่วงเชื่อมั่น 95% เท่ากับ

$$38.16 \pm \left(1.96 \times \sqrt{24.04}\right) = (28.55, 47.77)$$

ความแตกต่างระหว่างปลาภายในแต่ละตู้ปลาในการกินอาหารเม็ด เทียบเท่ากับ

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{24.63} = 4.96$

โมเดลว่าง

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์
เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมิน
เพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่

สำรวจข้อมูลการสัมภาษณ์จากผู้สมัคร 10,000 คน
ที่ได้รับการสัมภาษณ์เดี่ยวจากผู้สัมภาษณ์ 1,000 คน
โดยวัดคะแนนที่ผู้สัมภาษณ์ประเมิน คะแนนเต็ม 100 คะแนน

สร้างโมเดลเปล่าและหา ICC
ของคะแนนการประเมิน

โมเดลว่าง

ตัวแปร ID ระดับผู้ถูกสัมภาษณ์

ตัวแปร ID ระดับผู้สัมภาษณ์

คะแนนการสัมภาษณ์

```
> dat2 <-read.table("lecture4ex2.csv", sep=",", header=TRUE)
> describe(dat2)
      vars     n    mean      sd  median trimmed     mad   min      max   range  skew kurtosis    se
eeid     1 10000 5000.50 2886.90 5000.50 5000.50 3706.50  1.00 10000.00 9999.00  0.00    -1.20 28.87
erid     2 10000  500.50  288.69  500.50  500.50  370.65  1.00  1000.00  999.00  0.00    -1.20  2.89
score    3 10000   75.61    6.57   76.00   75.64    5.93 50.00   100.00   50.00 -0.05     0.07  0.07
eesex    4 10000    0.50    0.50    0.50    0.50    0.74  0.00     1.00    1.00  0.00    -2.00  0.01
ersex    5 10000    0.50    0.50    0.50    0.50    0.74  0.00     1.00    1.00  0.00    -2.00  0.01
iq       6 10000  100.20   14.88  100.28  100.17   14.88 50.82   157.57  106.76  0.03    -0.04  0.15
```

```
> out2m0 <- lmer(score ~ 1 + (1|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m0)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + (1 | erid)
   Data: dat2

     AIC       BIC    logLik deviance df.resid
 61754.1   61775.8 -30874.1  61748.1     9997

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.7662 -0.6329  0.0029  0.6438  3.4706

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 erid     (Intercept) 20.89    4.571
 Residual             22.26    4.718
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  75.6114     0.1521   497.3
```

$$\rho = \frac{20.89}{20.89 + 22.26} = .48$$

$$\beta_{0j} = 75.61 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.89$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.26$$

$$\beta_{0j} = 75.61 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.89$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.26$$

คะแนนการประเมินผู้สมัครจากผู้สัมภาษณ์ทุกคน เฉลี่ย 75.61 คะแนน

ผู้สัมภาษณ์แต่ละคนให้คะแนนประเมินเฉลี่ย อยู่ในช่วงเชื่อมั่น 95% เท่ากับ

$$75.61 \pm \left(1.96 \times \sqrt{20.89}\right) = (66.65, 84.57)$$

ความแตกต่างของคะแนนการประเมินระหว่างผู้สมัครภายในแต่ละผู้สัมภาษณ์

เทียบเท่ากับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{22.26} = 4.72$

หากมองในมุมมองของความยุติธรรมในการสัมภาษณ์ ความแตกต่างระหว่าง

ผู้สัมภาษณ์ควรจะน้อย กล่าวคือ $\mathrm{Var}(u_{0j}) = 0$ หรือ ICC = 0

โมเดลว่าง

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ

เก็บข้อมูลจากร้านอาหารจำนวน 500 โต๊ะ แต่ละโต๊ะ
มีผู้นั่งรวมเด็กและผู้ใหญ่ตั้งแต่ 2-8 คน รวม 2,262 คน

สร้างโมเดลเปล่าและหา ICC
ของคะแนนความพึงพอใจ

โมเดลว่าง

ตัวแปร ID ระดับลูกค้า

ตัวแปร ID ระดับโต๊ะ

คะแนนความพึงพอใจ

```
> dat3 <-read.table("lecture4ex3.csv", sep=",", header=TRUE)
> describe(dat3)
            vars    n    mean     sd median trimmed    mad min  max range  skew kurtosis    se
personid       1 2262 1131.50 653.13 1131.5 1131.50 838.41   1 2262  2261  0.00    -1.20 13.73
tableid        2 2262  249.73 144.15  251.0  250.11 183.84   1  500   499 -0.01    -1.20  3.03
sat            3 2262   64.12  11.66   64.0   64.25  11.86  20  100    80 -0.10    -0.10  0.25
age            4 2262   36.04  14.23   36.0   35.91  16.31   1   75    74  0.11    -0.20  0.30
female         5 2262    0.51   0.50    1.0    0.52   0.00   0    1     1 -0.05    -2.00  0.01
outdoor        6 2262    0.50   0.50    1.0    0.50   0.00   0    1     1 -0.01    -2.00  0.01
payperperson   7 2262  325.44  83.30  326.0  325.82  80.06  90  590   500 -0.01     0.03  1.75
numperson      8 2262    5.46   2.02    6.0    5.56   2.97   2    8     6 -0.21    -1.27  0.04
```

```
> out3m0 <- lmer(sat ~ 1 + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m0)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16952.7  16969.8  -8473.3  16946.7     2259

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.2436 -0.6240 -0.0043  0.6077  2.8041

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 60.34    7.768
 Residual             76.05    8.721
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  64.2814     0.4005   160.5
```

$$\rho = \frac{60.34}{60.34 + 76.05} = .44$$

$$\beta_{0j} = 64.28 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 60.34$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 76.05$$

$$\beta_{0j} = 64.28 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 60.34$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 76.05$$

คะแนนความพึงพอใจของลูกค้าทุกคนจากโต๊ะทุกโต๊ะ เฉลี่ย 64.28 คะแนน

โต๊ะแต่ละโต๊ะ ให้คะแนนความพึงพอใจเฉลี่ย อยู่ในช่วงเชื่อมั่น 95% เท่ากับ

$$64.28 \pm \left(1.96 \times \sqrt{60.34}\right) = (49.05, 79.51)$$

ความแตกต่างของคะแนนความพึงพอใจระหว่างลูกค้าภายในแต่ละโต๊ะ

เทียบเท่ากับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{76.05} = 8.72$

โมเดลว่าง

- ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยนั้น แบ่งเป็นความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยในระดับประชากร และความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยที่สังเกตได้ในการสุ่มจริง

$$\mathrm{Var}(\beta_{0j}) = \tau_{00}$$

ค่าประชากรของความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยระหว่างกลุ่มจริงๆ ที่เราไม่สามารถสังเกตได้

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}_j) = \tau_{00} + \sigma^2/n_j$$

ค่าที่สังเกตได้จากการเก็บข้อมูล ซึ่งเป็นการนำค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มมาใช้ประมาณค่าความแปรปรวน จึงมีความผิดพลาดจากการสุ่มต่อท้ายมา

โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์

- ความแตกต่างของตัวแปรตามในแต่ละระดับ สามารถทำนายได้ด้วยตัวแปรต้นในแต่ละระดับ เริ่มต้นจากตัวแปรต้นในระดับที่ 2

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

- ค่า $Y_{ij}, \beta_{0j}, e_{ij}$ มีความหมายเดียวกับโมเดลว่าง (Null Model)
- β_{0j} คือ ค่าเฉลี่ยของค่า Y ในกลุ่มที่ j

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

- W_{1j} และ W_{2j} คือค่าของตัวแปรต้นระดับกลุ่มตัวที่ 1 และตัวที่ 2 ในกลุ่มที่ j
- γ_{00} คือ ค่าของ *Y* ในกลุ่มที่ค่าตัวแปรต้นระดับกลุ่ม $(W_1$ และ $W_2)$ เท่ากับ 0
- γ_{01} คือ ค่าของ *Y* ที่เพิ่มขึ้น เมื่อ W_1 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย และควบคุม W_2 ให้คงที่
- γ_{02} คือ ค่าของ *Y* ที่เพิ่มขึ้น เมื่อ W_2 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย และควบคุม W_1 ให้คงที่
- u_{0j} คือ ค่าความเบี่ยงเบนจากคะแนนค่า *Y* เฉลี่ยจริงของกลุ่ม *j* และคะแนนค่า *Y* เฉลี่ยที่ทำนายได้จากค่าตัวแปรต้นทั้งหมด $(W_1$ และ $W_2)$ ของกลุ่ม *j* กล่าวคือ เป็นความผิดพลาดในการทำนายในระดับกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_{1j} + \gamma_{02} W_{2j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

- โมเดลนี้เรียกว่า โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์ (Mean-as-Outcome Model)
- ค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดทั้งสองระดับ จะแสดงถึงค่าความแปรปรวนคงเหลือ (Residual Variance) หลังจากคิดตัวแปรอิสระไปแล้ว

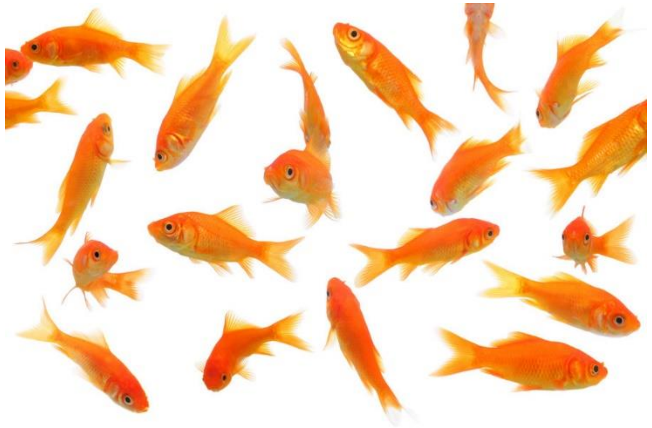
$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = \tau_{00} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = \sigma^2$$

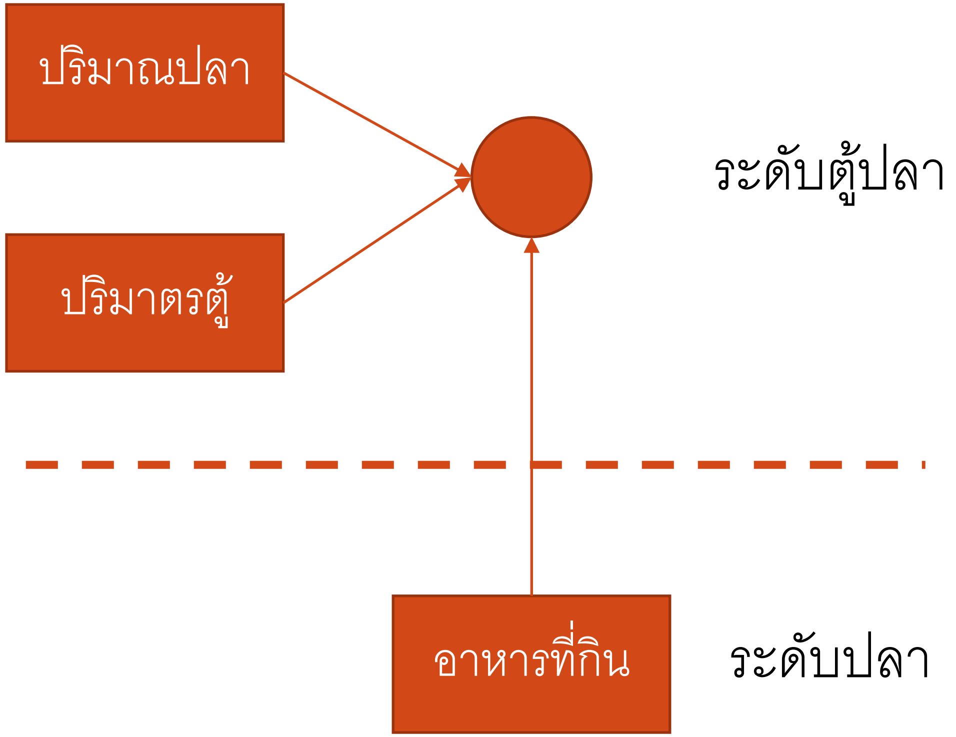
- ค่าความสัมพันธ์ระหว่างชั้นคงเหลือ (Residual Intraclass Correlation) จะใช้สูตรเดิม เพียงแค่ที่มาของความแปรปรวนจะมาจากโมเดลที่มีตัวแปรอิสระ ไม่ใช้โมเดลเปล่า

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \sigma^2}$$

โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์

ทำนายปริมาณอาหารที่ปลาทองกิน
ด้วยปริมาตรของตู้ และปริมาณปลาในตู้





```
> out1m1 <- lmer(consume ~ nfish + volume + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ nfish + volume + (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5073.4   5096.9  -2531.7   5063.4      806

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.61728 -0.69324  0.03748  0.67548  3.03298

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 13.20    3.633
 Residual             24.62    4.962
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  35.1096     1.3547  25.917
nfish        -1.2111     0.2381  -5.087   sig
volume       18.0981     2.2787   7.942   sig

Correlation of Fixed Effects:
       (Intr) nfish
nfish  -0.533
volume -0.108 -0.760
```

$$\rho = \frac{13.20}{13.20 + 24.62} = .35$$

$$\beta_{0j} = 35.11 - 1.21W_1 + 18.10W_2 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 13.20$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 24.62$$

$$\beta_{0j} = 35.11 - 1.21W_1 + 18.10W_2 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 13.20$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 24.62$$

เมื่อปริมาณปลาเท่ากับ 0 ตัวและปริมาตรตู้ปลาเท่ากับ 0 ลบ.ม. แล้ว ปริมาณอาหารที่ปลากินเฉลี่ยอยู่ที่ 35.11 เม็ดต่อวัน

หากควบคุมปริมาตรตู้ปลาให้คงที่ ถ้าปลาเพิ่มขึ้นหนึ่งตัว อาหารที่ปลากินเฉลี่ยลดลง 1.21 เม็ดต่อวัน

หากควบคุมปริมาณปลาให้คงที่ ถ้าปริมาตรเพิ่มขึ้น 1 ลบ.ม. อาหารที่ปลากินเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 18.10 เม็ดต่อวัน

ควรมีการย้ายศูนย์กลางของตัวแปรอิสระทั้ง 2 ตัว เพื่อให้การตีความหมาย γ_{00} ตรงกับสถานการณ์ความเป็นจริงมากขึ้น

```
> out1m1_1 <- lmer(consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume)) + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1m1_1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume)) +      (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5073.4   5096.9  -2531.7   5063.4      806

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.61728 -0.69324  0.03748  0.67548  3.03298

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 13.20    3.633
 Residual             24.62    4.962
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
                         Estimate Std. Error t value
(Intercept)               38.3144     0.4202  91.187
I(nfish - mean(nfish))    -1.2111     0.2381  -5.087
I(volume - mean(volume))  18.0981     2.2787   7.942

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-mn(n))
I(-mn(nfs))  0.163
I(-mn(vlm))  0.000 -0.760
```

$$\boxed{\beta_{0j} = 38.31 - 1.21(W_{1j} - 9) + 18.10(W_{2j} - 0.78) + u_{0j}}$$

เมื่อปริมาณปลาเท่ากับ 9 ตัวและปริมาตรตู้ปลาเท่ากับ 0.78 ลบ.ม. แล้ว ปริมาณอาหารที่ปลากินเฉลี่ยอยู่ที่ 38.31 เม็ดต่อวัน

- ผลลัพธ์ไม่ได้ให้ค่า *p* โดยตรง แต่ให้ค่า *t* มา
- Doug Bates ผู้สร้างชุดคำสั่งนี้ ให้เหตุผลที่ไม่ให้ค่า *p* มา เพราะว่า เราไม่มีทางรู้ *df* ของการทดสอบแต่ละชุด สิ่งที่เรารู้ คือ แค่การประมาณการค่า *df* ซึ่งอาจไม่ถูกต้อง
- วิธีการที่ง่ายที่สุด ณ ตอนนี้ คือ เปรียบเทียบค่า t กับตารางค่า *z* ไปก่อน
- ในภายหลัง อีกทางเลือกที่น่าเชื่อถือ คือ การใช้การทดสอบสัดส่วนความเป็นไปได้ (Likelihood Ratio Test) ในการทดสอบอิทธิพลของตัวแปรแต่ละตัว

```
> out1m1_1 <- lmer(consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume)) + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1m1_1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume)) +      (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5073.4   5096.9  -2531.7   5063.4      806

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.61728 -0.69324  0.03748  0.67548  3.03298

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 13.20    3.633
 Residual             24.62    4.962
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
                         Estimate Std. Error t value
(Intercept)               38.3144     0.4202  91.187
I(nfish - mean(nfish))    -1.2111     0.2381  -5.087
I(volume - mean(volume))  18.0981     2.2787   7.942

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-mn(n))
I(-mn(nfs))  0.163
I(-mn(vlm))  0.000 -0.760
```

$$|t| > 1.96 \rightarrow p < .05$$
$$|t| > 2.58 \rightarrow p < .01$$

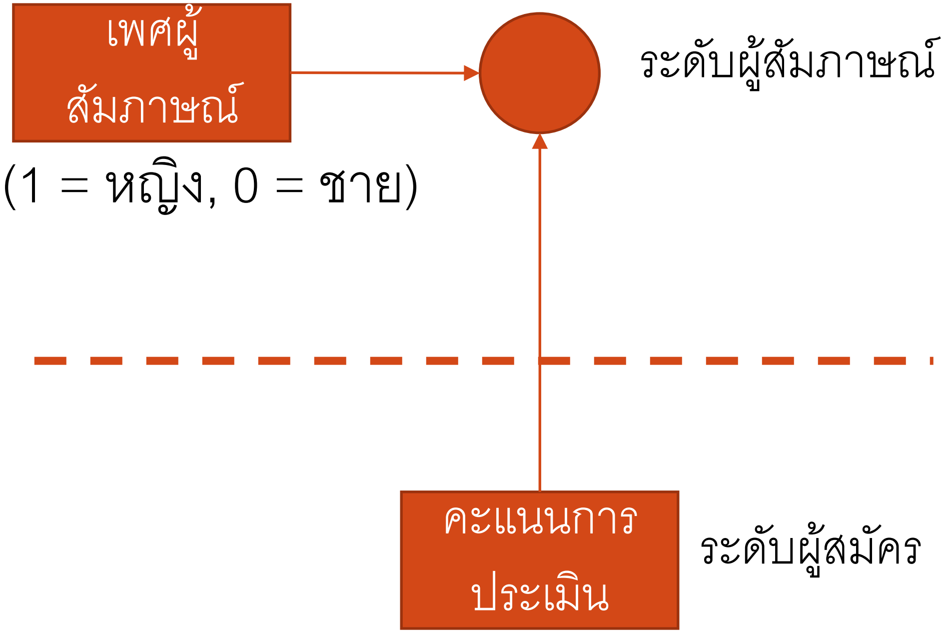
ในที่นี้ ตัวแปรอิสระทุกตัวมีผลต่อตัวแปรตามอย่างมีนัยสำคัญ

สามารถหาค่า *p* จริงๆ ได้ โดยวิธีดังต่อไปนี้

```
> summary1m1_1 <- summary(out1m1_1)
> coef1m1_1 <- coef(summary1m1_1)
> coef1m1_1
                          Estimate Std. Error   t value
(Intercept)              38.314427  0.4201743 91.186985
I(nfish - mean(nfish))   -1.211056  0.2380587 -5.087214
I(volume - mean(volume)) 18.098092  2.2786698  7.942393
> tvalue1m1_1 <- coef1m1_1[,"t value"]
> tvalue1m1_1
             (Intercept)   I(nfish - mean(nfish)) I(volume - mean(volume))
               91.186985                -5.087214                 7.942393
> pnorm(abs(tvalue1m1_1), lower.tail=FALSE) * 2
             (Intercept)   I(nfish - mean(nfish)) I(volume - mean(volume))
             0.00000e+00              3.63361e-07              1.98317e-15
```

โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมินเพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่



```
> out2m1 <- lmer(score ~ 1 + ersex + (1|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + ersex + (1 | erid)
   Data: dat2

     AIC       BIC    logLik deviance df.resid
 61752.9   61781.7  -30872.4  61744.9     9996

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.7604 -0.6335  0.0010  0.6456  3.4647

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 erid     (Intercept) 20.82    4.563
 Residual             22.26    4.718
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  75.3376     0.2147 350.915
ersex         0.5476     0.3036   1.804

Correlation of Fixed Effects:
      (Intr)
ersex -0.707
```

not sig

$$\rho = \frac{20.82}{20.82 + 22.26} = .48$$

$$\beta_{0j} = 75.34 + 0.55W_1 + u_{0j}$$
$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.82$$
$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.26$$

$$\beta_{0j} = 75.34 + 0.55W_1 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.82$$

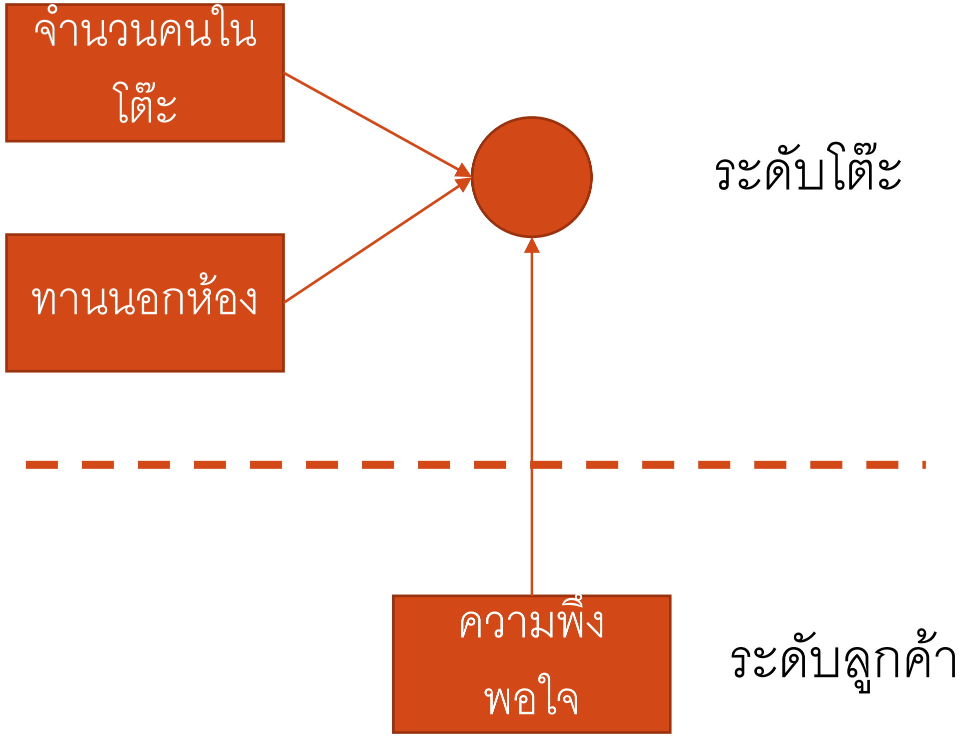
$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.26$$

คะแนนประเมินของผู้สัมภาษณ์ชายเฉลี่ยเท่ากับ 75.34

ผู้สัมภาษณ์เพศหญิงให้คะแนนประเมินเฉลี่ยสูงกว่าผู้สัมภาษณ์ชาย 0.55 คะแนน แต่ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

โมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ



```
> out3m1 <- lmer(sat ~ 1 + I(numperson - 4) + outdoor + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + I(numperson - 4) + outdoor + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC       BIC    logLik deviance df.resid
 16943.7   16972.4   -8466.9  16933.7     2257

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.2689 -0.6341 -0.0019  0.6189  2.7590

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 58.24    7.632
 Residual             76.06    8.721
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                 Estimate Std. Error t value
(Intercept)       63.1131     0.5768 109.420
I(numperson - 4)  -0.2375     0.1920  -1.237
outdoor            2.6954     0.7904   3.410

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(n-4)
I(nmprsn-4) -0.247
outdoor     -0.683 -0.008
```

not sig

sig

$$\rho = \frac{58.24}{58.24 + 76.06} = .43$$

$$\beta_{0j} = 63.11 - 0.24(W_1 - 4) + 2.70W_2 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 58.24$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 76.06$$

$$\beta_{0j} = 63.11 - 0.24(W_1 - 4) + 2.70W_2 + u_{0j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 58.24$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 76.06$$

เมื่อทานอาหารในร้านและโต๊ะมีคนนั่ง 4 คน คะแนนความพึงพอใจของโต๊ะเฉลี่ย เท่ากับ 63.11 คะแนน

เปรียบเทียบระหว่างโต๊ะที่อยู่ในร้านเหมือนกัน หรือนอกร้านเหมือนกัน หากสมาชิกโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 คน จะทำให้คะแนนความพึงพอใจเฉลี่ยของโต๊ะลดลง 0.24 คะแนน แต่ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

การทานอาหารนอกร้านจะมีคะแนนความพึงพอใจสูงกว่าการทานอาหารในร้าน 2.70 คะแนน เมื่อควบคุมจำนวนสมาชิกในโต๊ะในคงที่

โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบสุ่ม

- หากเพิ่มตัวแปรต้นในระดับที่ 1 โมเดลจะเป็นดังต่อไปนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$
$$\beta_{2j} = \gamma_{20}$$ ระดับที่ 2

- Y_{ij}, X_{1ij}, X_{2ij} คือ คะแนนของตัวแปรตาม, ตัวแปรอิสระที่ 1, และตัวแปรอิสระที่ 2 ของคนที่ *i* ในกลุ่มที่ *j*

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}; \beta_{1j} = \gamma_{10}; \beta_{2j} = \gamma_{20}$$ ระดับที่ 2

- β_{0j} คือ ค่าของจุดตัดแกน *Y* ในกลุ่มที่ *j* กล่าวคือ ค่าของตัวแปรตามที่ทำนายได้ เมื่อตัวแปรอิสระทั้งหมดเท่ากับ 0 ในกลุ่มที่ *j* สังเกตว่าค่านี้จะแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม (เพราะมี u_{0j}) เฉลี่ยทุกกลุ่มแล้วค่าของจุดตัด เท่ากับ γ_{00}
- β_{1j} คือ ค่าความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* ในกลุ่มที่ *j* หรือ ค่าของตัวแปรตามที่เปลี่ยนแปลง เมื่อตัวแปรอิสระตัวที่ 1 เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและควบคุมตัวแปรอิสระที่ 2 ในคงที่ ในกลุ่มที่ *j* สังเกตว่าในโมเดลนี้ ค่าไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม โดยมีค่าเท่ากับ γ_{10} ทุกกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}; \beta_{1j} = \gamma_{10}; \beta_{2j} = \gamma_{20}$$ ระดับที่ 2

- β_{2j} คือ ค่าความชันของ X_2 ที่มีต่อ Y ในกลุ่มที่ j หรือ ค่าของตัวแปรตามที่เปลี่ยนแปลง เมื่อตัวแปรอิสระตัวที่ 2 เพิ่มขึ้น 1 หน่วยและควบคุมตัวแปรอิสระที่ 1 ในคงที่ ในกลุ่มที่ j สังเกตว่าในโมเดลนี้ ค่าไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม โดยมีค่าเท่ากับ γ_{20} ทุกกลุ่ม
- γ_{00} คือ ค่าเฉลี่ยของจุดตัดแกน Y ของทุกกลุ่ม
- γ_{10}, γ_{20} คือ ค่าความชันของ X_1 และ X_2 ของทุกกลุ่ม
- e_{ij} คือ ค่าความผิดพลาดในการทำนายของคนที่ i ในกลุ่มที่ j
- u_{0j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของจุดตัดแกน Y ของกลุ่ม j จากค่าเฉลี่ยของจุดตัดแกน Y เฉลี่ยทุกกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}; \beta_{1j} = \gamma_{10}; \beta_{2j} = \gamma_{20}$$ ระดับที่ 2

- โมเดลนี้เรียกว่า โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบสุ่ม (Random Analysis of Covariance)
  - โมเดลนี้ สามารถใช้ตรวจสอบว่าความแตกต่างระหว่างกลุ่มถึงระดับนัยสำคัญหรือไม่ เมื่อควบคุม X_1 และ X_2 ให้คงที่ ซึ่งเหมือนกับ ANCOVA
  - สาเหตุที่เรียกว่าสุ่ม (Random) เนื่องจากว่าการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่ม ไม่ได้สนใจแค่เฉพาะกลุ่มที่เก็บข้อมูลได้ แต่สนใจประชากรของกลุ่มที่อยู่ภายใต้กลุ่มที่เก็บข้อมูลได้ เช่น ไม่ได้สนใจอยากรู้ว่า 10 โรงเรียนที่เก็บข้อมูลได้แตกต่างกันหรือไม่ แต่สนใจว่าประชากรโรงเรียนทั้งหมดมีความแตกต่างกันในตัวแปรตามหรือไม่
  - ทดสอบได้ โดยตรวจสอบ $H_0: \tau_{00} = 0$ ซึ่งวิธีการทดสอบจะกล่าวถึงในหัวข้อการทดสอบสัดส่วนความเป็นไปได้ (Likelihood Ratio Test) ในอนาคต

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}; \beta_{1j} = \gamma_{10}; \beta_{2j} = \gamma_{20}$$ ระดับที่ 2

- ค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดทั้งสองระดับ จะแสดงถึงค่าความแปรปรวนคงเหลือ (Residual Variance) หลังจากคิดตัวแปรอิสระไปแล้ว

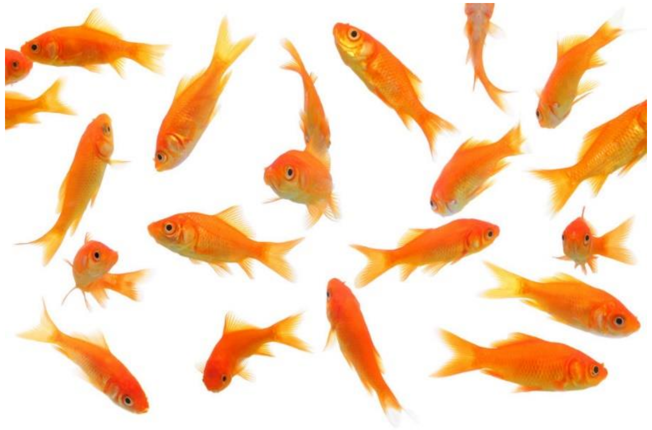
$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = \tau_{00} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = \sigma^2$$

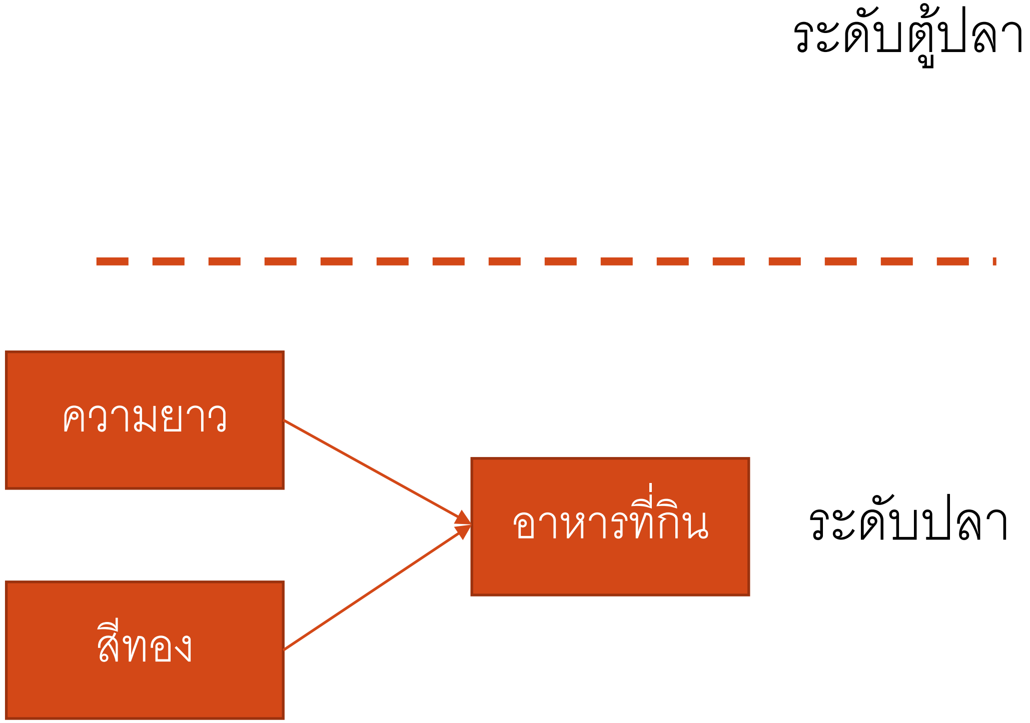
- ค่าความสัมพันธ์ระหว่างชั้นคงเหลือ (Residual Intraclass Correlation) จะใช้สูตรเดิม เพียงแค่ที่มาของความแปรปรวนจะมาจากโมเดลที่มีตัวแปรอิสระ ไม่ใช้โมเดลเปล่า

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \sigma^2}$$

โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสุ่ม

ทำนายปริมาณอาหารที่ปลาทองกิน
ด้วยความยาวของปลา และสีของปลา





```
> out1m2 <- lmer(consume ~ I(length - 15) + goldcolor + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ I(length - 15) + goldcolor + (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid 
  4127.7   4151.2  -2058.8   4117.7      806 

Scaled residuals: 
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.2524 -0.6184  0.0284  0.6508  3.1677 

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 18.644   4.318   
 Residual              6.363   2.522   
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
               Estimate Std. Error t value
(Intercept)    39.34350    0.45266  86.916
I(length - 15)  0.88283    0.01943  45.442   sig
goldcolor      -0.46446    0.18697  -2.484   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-15)
I(lngth-15)  0.040       
goldcolor   -0.211  0.027
```

$$\rho = \frac{18.64}{18.64 + 6.36} = .75$$

$$\beta_{0j} = 39.34 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.88; \beta_{2j} = -0.46 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 18.64$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 6.36$$

$$\beta_{0j} = 39.34 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.88; \beta_{2j} = -0.46 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 18.64$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 6.36$$

ปลาที่ไม่ได้มีสีทอง ความยาว 15 ซม. จะมีการกินอาหารเฉลี่ย 39.34 เม็ดต่อวัน

ภายในปลาสีเดียวกัน หากปลามีความยาวเพิ่มขึ้น 1 ซม. จะมีการกินอาหารเพิ่มขึ้น 0.88 เม็ดต่อวัน

ภายในปลาที่มีความยาวเท่ากัน ปลาสีอื่นจะมีการกินอาหารเม็ดมากกว่าปลาสีทอง 0.46 เม็ดต่อวันโดยเฉลี่ย

โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสุ่ม

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมินเพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่

ระดับผู้สัมภาษณ์

เพศผู้สมัคร

(1 = หญิง, 0 = ชาย)

คะแนนเชาวน์ปัญญา

คะแนนการประเมิน

ระดับผู้สมัคร

```
> out2m2 <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1 | erid)
   Data: dat2

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid 
 61676.1  61712.2 -30833.1  61666.1     9995 

Scaled residuals: 
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.7323 -0.6356 -0.0036  0.6447  3.3714 

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 erid     (Intercept) 20.86    4.567   
 Residual             22.07    4.697   
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.543619   0.158973 475.199
eesex        0.123540   0.093952   1.315
I(iq - 100)  0.029659   0.003307   8.970

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) eesex 
eesex       -0.295       
I(iq - 100) -0.002 -0.007
```

no sig

sig

$$\rho = \frac{18.64}{18.64 + 6.36} = .49$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12; \beta_{2j} = 0.03 \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.86$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.07$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12; \beta_{2j} = 0.03 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.86$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.07$$

ผู้สมัครเพศชายที่มีคะแนน IQ เท่ากับ 100 จะได้รับคะแนนประเมินเฉลี่ย 75.54 คะแนน

เมื่อควบคุม IQ ให้คงที่ ผู้สมัครเพศหญิงจะได้รับคะแนนประเมินมากกว่าผู้สมัครเพศชาย 0.12 คะแนนโดยเฉลี่ย ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ในผู้สมัครเพศเดียวกัน หาก IQ ของผู้สมัครเพิ่มขึ้น 1 แต้ม คะแนนประเมินที่ได้รับจะเพิ่มขึ้น 0.03 แต้ม

โมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบสุ่ม

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ

ระดับโต๊ะ

เพศของลูกค้า

(1 = หญิง, 0 = ชาย)

อายุ

ความพึงพอใจ

ระดับลูกค้า

```
> out3m2 <- lmer(sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16553.0  16581.6  -8271.5  16543.0     2257

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.95679 -0.59088 -0.00305  0.59996  2.94782

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 68.43    8.272
 Residual             59.69    7.726
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 66.44867    0.45496 146.055
I(age - 40)  0.26085    0.01242  20.994   sig
female      -2.14516    0.36228  -5.921   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-40)
I(age - 40)  0.140
female      -0.417 -0.073
```

$$\rho = \frac{68.43}{68.43 + 59.69} = .53$$

$$\beta_{0j} = 66.45 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.26; \beta_{2j} = -2.15 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 68.43$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 59.69$$

$$\beta_{0j} = 66.45 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.26; \beta_{2j} = -2.15 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 68.43$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 59.69$$

ลูกค้าเพศชายอายุ 40 ปี มีความพึงพอใจเฉลี่ย 66.45 แต้ม

ในลูกค้าเพศเดียวกัน หากอายุเพิ่มขึ้น 1 ปี ความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.26 แต้ม

หากลูกค้าอายุเท่ากัน ลูกค้าเพศชายมีความพึงพอใจต่อการทานอาหารมากกว่าลูกค้าเพศหญิง 2.15 แต้ม

โมเดลจุดตัดแบบสุ่ม

- ใส่ตัวแปรอิสระทั้ง 2 ระดับ โมเดลจะเป็นดังต่อไปนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20}$$

ระดับที่ 2

- $Y_{ij}, X_{1ij}, X_{2ij}, \beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, e_{ij}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ แปลความหมายเหมือนกับโมเดลที่แล้ว (Random ANCOVA)
- สังเกตว่า β_{0j} มีความหมายแตกต่างจากโมเดลค่าเฉลี่ยเป็นผลลัพธ์ (Mean-as-Outcome Model)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

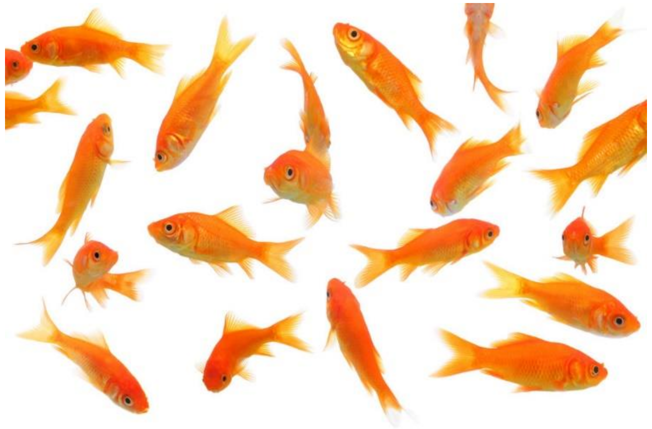
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

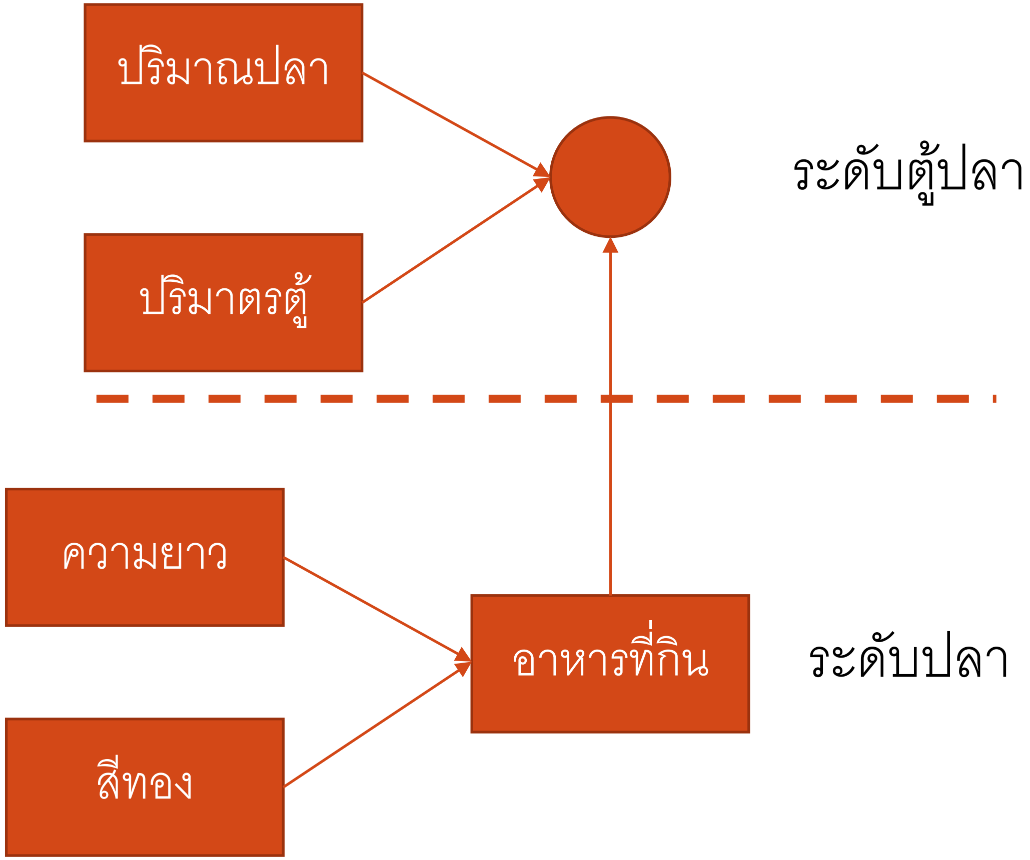
$$\beta_{1j} = \gamma_{10}; \ \beta_{2j} = \gamma_{20}$$

- γ_{00} คือ ค่าของตัวแปรตาม เมื่อ X_1, X_2, W_1, W_2 มีค่าเท่ากับ 0
- W_{1j}, W_{2j} คือค่าของตัวแปรอิสระระดับกลุ่มทั้ง 2 ตัวของกลุ่มที่ *j*
- γ_{01} คือ ค่าของจุดตัดแกน $Y\left(\beta_{0j}\right)$ ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่า W_1 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม เมื่อควบคุม W_2 ให้คงที่ (กล่าวคือ ค่าของ Y ที่เปลี่ยนแปลง เมื่อ W_1 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม และควบคุม X_1, X_2, และ W_2 ให้คงที่)
- γ_{02} คือ ค่าของจุดตัดแกน $Y\left(\beta_{0j}\right)$ ที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่า W_2 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม เมื่อควบคุม W_1 ให้คงที่ (กล่าวคือ ค่าของ Y ที่เปลี่ยนแปลง เมื่อ W_2 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม และควบคุม X_1, X_2, และ W_1 ให้คงที่)
- u_{0j} คือ ค่าความผิดพลาดในการทำนายจุดตัดแกน $Y\left(\beta_{0j}\right)$ ที่ W_1 และ W_2 ไม่สามารถอธิบายได้

โมเดลจุดตัดแบบสุ่ม

ทำนายปริมาณอาหารที่ปลาทองกิน
ด้วยความยาวของปลา และสีของปลา





```
> outlm3 <- lmer(consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume))
 + I(length - 15) + goldcolor + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> summary(outlm3)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ I(nfish - mean(nfish)) + I(volume - mean(volume)) +
    I(length - 15) + goldcolor + (1 | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  4087.8   4120.7  -2036.9   4073.8      804

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.2895 -0.6440  0.0324  0.6377  3.1624

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 groupid  (Intercept) 11.768   3.430
 Residual              6.358   2.522
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
                         Estimate Std. Error t value
(Intercept)              39.37890    0.38422 102.491
I(nfish - mean(nfish))   -1.11583    0.20651  -5.403   sig
I(volume - mean(volume)) 14.76808    1.99877   7.389   sig
I(length - 15)            0.87926    0.01939  45.346   sig
goldcolor                -0.47843    0.18663  -2.563   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-mn(n)) I(-mn(v)) I(-15)
I(-mn(nfs))  0.182
I(-mn(vlm)) -0.001 -0.760
I(lngth-15)  0.040  0.016     -0.042
goldcolor   -0.248  0.005     -0.005     0.027
```

$$\rho = \frac{11.77}{11.77 + 6.36} = .65$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 11.77$$

$$\beta_{0j} = 39.37 - 1.12(W_{1j} - \bar{W}_1) + 14.77(W_{2j} - \bar{W}_{2.j}) + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.88; \beta_{2j} = -0.48$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 6.36$$

$$\beta_{0j} = 39.37 - 1.12(W_{1j} - \bar{W}_1) + 14.77(W_{2j} - \bar{W}_{2.j}) + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.88; \beta_{2j} = -0.48$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

ปลาที่ไม่ได้มีสีทอง ความยาว 15 ซม. อยู่ในตู้ปลาที่มีจำนวนปลา 9 ตัว และมีปริมาตร 0.78 ลบ.ม. จะมีการกินอาหารเฉลี่ย 39.37 เม็ดต่อวัน

หากควบคุมปริมาตรตู้ปลาให้คงที่ หากจำนวนปลาเพิ่มขึ้น 1 ตัว การกินอาหารปลาของปลาที่ไม่ได้มีสีทองและความยาว 15 ซม. จะลดลง 1.12 เม็ดต่อวัน

หากควบคุมจำนวนปลาในตู้ให้คงที่ หากปริมาตรเพิ่มขึ้น 1 ลบ.ม. การกินอาหารปลาของปลาที่ไม่ได้มีสีทองและความยาว 15 ซม. จะเพิ่มขึ้น 14.77 เม็ดต่อวัน

ภายในปลาสีเดียวกัน หากปลามีความยาวเพิ่มขึ้น 1 ซม. จะมีการกินอาหารเพิ่มขึ้น 0.88 เม็ดต่อวัน

ภายในปลาที่มีความยาวเท่ากัน ปลาสีอื่นจะมีการกินอาหารเม็ดมากกว่าปลาสีทอง 0.48 เม็ดต่อวันโดยเฉลี่ย

$$\beta_{0j} = 39.37 - 1.12(W_{1j} - \bar{W}_1) + 14.77(W_{2j} - \bar{W}_{2.j}) + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.88; \beta_{2j} = -0.48$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

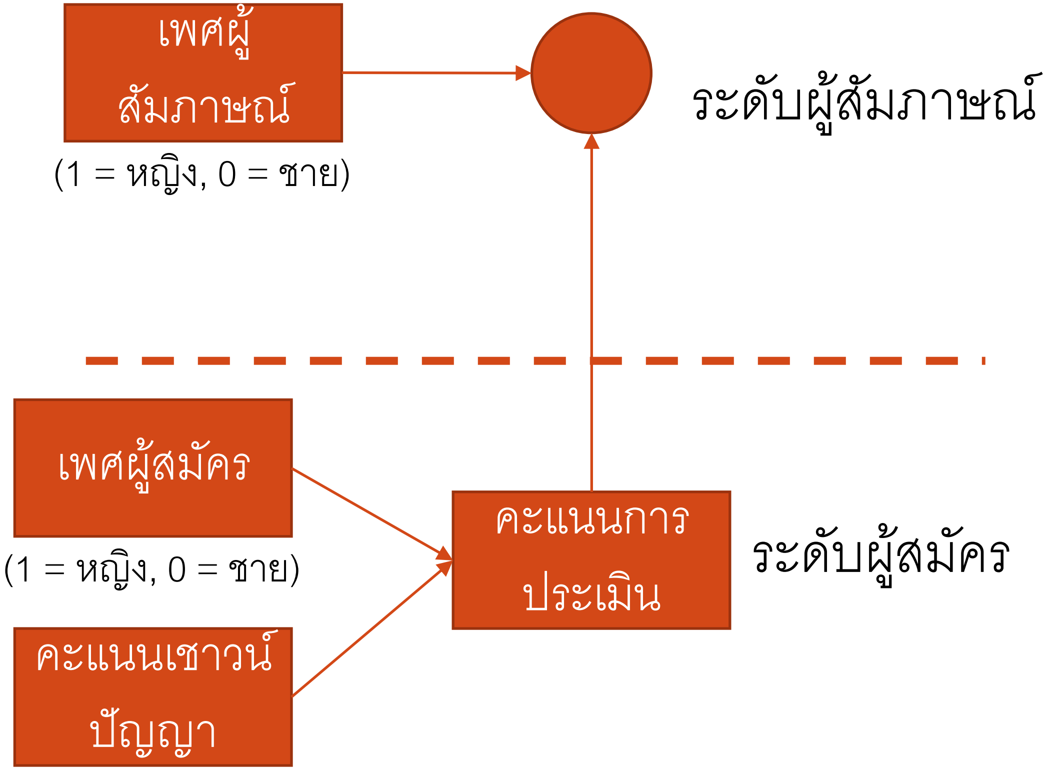
ถ้ามีการย้ายศูนย์กลางโดยการลบหรือบวกตัวแปรต้นระดับที่ 1 (X_1, X_2) ด้วยค่าคงที่แล้ว ค่าของความชันของตัวแปรระดับที่ 2 ที่มีต่อ β_{0j} (γ_{01} และ γ_{02}) ยังไม่เปลี่ยนแปลง (เฉพาะโมเดลจุดตัดแบบสุ่ม) จึงสามารถแปลความหมายของ γ_{01} และ γ_{02} ได้ดังต่อนี้

หากควบคุมปริมาตรตู้ปลาให้คงที่ หากจำนวนปลาเพิ่มขึ้น 1 ตัว การกินอาหารปลาของปลาที่มีสีเหมือนกันและความยาวเท่ากัน จะลดลง 1.12 เม็ดต่อวัน

หากควบคุมจำนวนปลาในตู้ให้คงที่ หากปริมาตรเพิ่มขึ้น 1 ลบ.ม. การกินอาหารปลาของปลาที่มีสีเหมือนกันและความยาวเท่ากัน จะเพิ่มขึ้น 14.77 เม็ดต่อวัน

โมเดลจุดตัดแบบสุ่ม

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์
เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมิน
เพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่



```
> out2m3 <- lmer(score ~ 1 + ersex + eesex + I(iq - 100) + (1|erid),
 data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m3)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + ersex + eesex + I(iq - 100) + (1 | erid)
   Data: dat2

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 61674.9  61718.2 -30831.4  61662.9     9994

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.7265 -0.6355 -0.0029  0.6452  3.3655

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 erid     (Intercept) 20.78    4.559
 Residual             22.07    4.697
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.270267   0.219518 342.888
ersex        0.546704   0.303254   1.803   Not sig
eesex        0.123540   0.093952   1.315   Not sig
I(iq - 100)  0.029658   0.003307   8.969   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) ersex  eesex
ersex       -0.691
eesex       -0.214  0.000
I(iq - 100) -0.001  0.000 -0.007
```

$$\rho = \frac{20.78}{20.78 + 22.07} = .48$$

$$\beta_{0j} = 75.27 + 0.55W_{1j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12; \beta_{2j} = 0.03 \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.78$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.07$$

$$\beta_{0j} = 75.27 + 0.55W_{1j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12; \beta_{2j} = 0.03 \quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.78$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij} \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 22.07$$

คะแนนที่ผู้สัมภาษณ์เพศชาย ประเมินผู้สมัครเพศชาย ที่มีระดับ IQ เท่ากับ 100 เท่ากับ 75.27 คะแนน

ผู้สัมภาษณ์เพศหญิงประเมินคะแนนสูงกว่าผู้สัมภาษณ์เพศชาย 0.55 คะแนน เมื่อประเมินผู้สมัครเพศเดียวกัน ระดับ IQ เท่ากัน แต่ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ผู้สมัครเพศหญิงได้รับคะแนนประเมินสูงกว่าเพศชาย 0.12 คะแนนโดยเฉลี่ย เมื่อควบคุม IQ ให้คงที่ แต่ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

หากผู้สมัครมีคะแนน IQ สูงขึ้น 1 หน่วย จะได้รับคะแนนประเมินสูงขึ้น 0.03 แต้ม เมื่อควบคุมเพศของผู้สมัครให้คงที่

อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

- ตัวแปรอิสระในระดับที่ 1 สามารถนำไปสร้างเป็นตัวแปรโครงสร้าง (Structural Variable) ของระดับที่ 2 ได้ เช่น ค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระในแต่ละกลุ่ม สามารถใช้เป็นตัวแปรทำนายในระดับที่ 2 พร้อมกับค่าของตัวแปรเดิม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

ระดับที่ 2

- สมการรวมทั้ง 2 ระดับจะเป็นดังนี้

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}X_{1ij} + e_{ij}$$

อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

- หากนำสมการรวมมาหาค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(\gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}X_{1ij} + e_{ij})$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{1ij}) + \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(e_{ij})$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} = \gamma_{00} + (\gamma_{01} + \gamma_{10})\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

- จากสมการนี้จะเห็นว่า อิทธิพลระหว่างกลุ่มจาก X_1 ไป Y คือ $\gamma_{01} + \gamma_{10}$ กล่าวคือ เมื่อ $\bar{X}_1$ เพิ่มขึ้น 1 หน่วย $\bar{Y}$ เพิ่มขึ้น $\gamma_{01} + \gamma_{10}$ หน่วย

อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

- เอาสมการรวมมาลบด้วยสมการค่าเฉลี่ยของ Y

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}X_{1ij} + e_{ij} - \bar{Y}_{.j} \\
&= \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \gamma_{10}X_{1ij} + e_{ij} - \gamma_{00} - (\gamma_{01} + \gamma_{10})\bar{X}_{1.j} - u_{0j} \\
&= \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}
\end{aligned}
$$

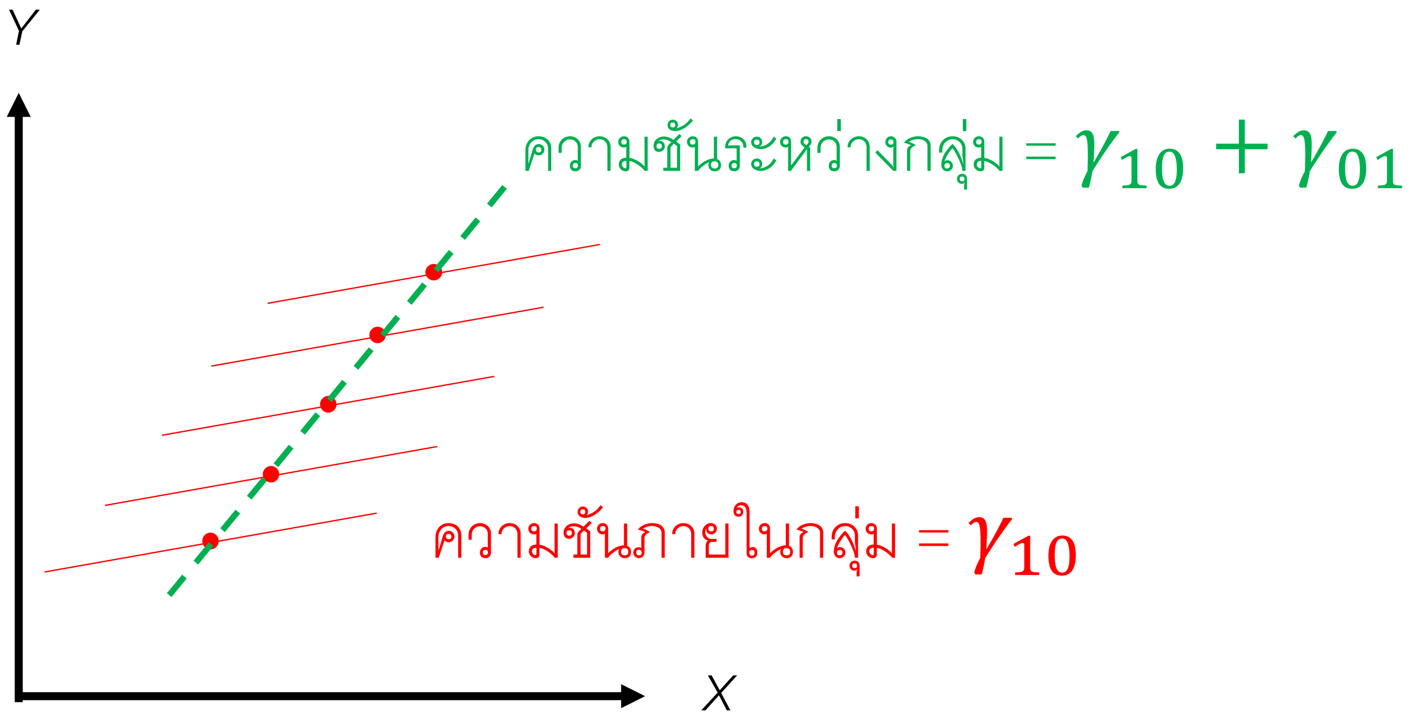
- จากสมการนี้จะเห็นว่า อิทธิพลภายในกลุ่มจาก X_1 ไป Y คือ γ_{10} กล่าวคือ เมื่อค่าเบี่ยงเบนของ X_1 ภายในกลุ่ม เพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่าเบี่ยงเบนของ Y ภายในกลุ่ม เพิ่มขึ้น γ_{10} หน่วย

อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

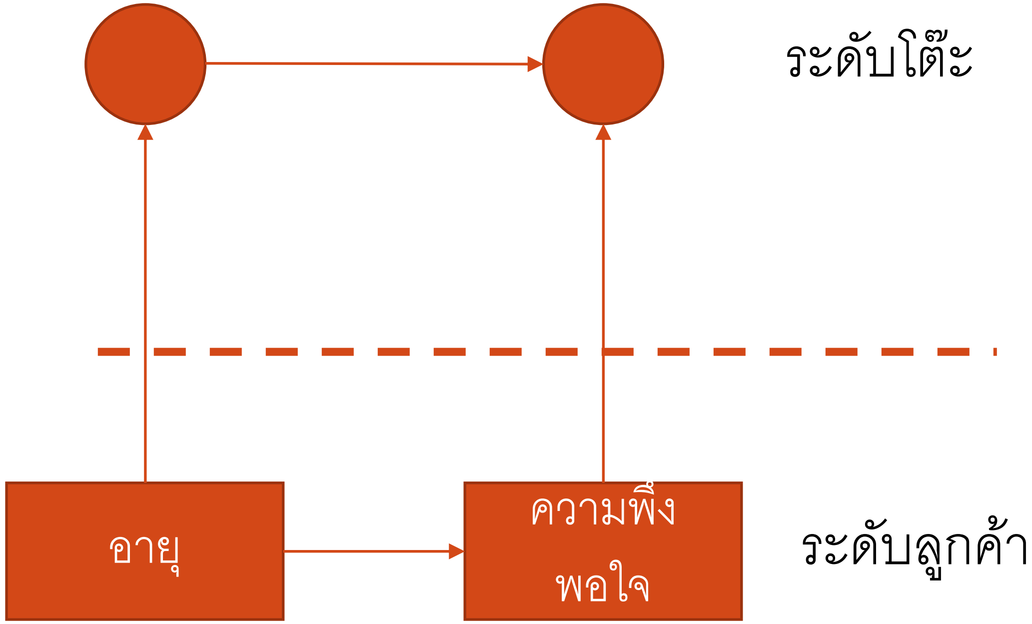
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$



อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ



```
> dat3$aveage <- ave(dat3$age, dat3$tableid)
> out3m3 <- lmer(sat ~ I(age - 40) + I(aveage - 40) + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m3)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ I(age - 40) + I(aveage - 40) + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16562.7  16591.3  -8276.4  16552.7     2257

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1638 -0.6006 -0.0048  0.6144  3.0681

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 64.30    8.019
 Residual             60.82    7.799
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
               Estimate Std. Error t value
(Intercept)    64.08614    0.47176 135.845
I(age - 40)     0.26783    0.01276  20.992   sig
I(aveage - 40) -0.31818    0.06279  -5.068   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(g-40)
I(age - 40)  0.000
I(aveg-40)   0.516 -0.203
```

$$\rho = \frac{64.30}{64.30 + 60.82} = .48$$

$$\beta_{0j} = 64.09 - 0.31\left(\overline{X}_{1.j} - 40\right) + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.27$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 64.30$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 60.82$$

$$\beta_{0j} = 64.09 - 0.31(W_{1j} - 40) + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.27 \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 64.30$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 40) + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 60.82$$

ในโต๊ะที่มีอายุเฉลี่ย 40 ปี ลูกค้าที่มีอายุ 40 ปีจะมีคะแนนความพึงพอใจ 64.09 แต้ม

ในโต๊ะเดียวกัน หากอายุของลูกค้าเพิ่มขึ้น 1 ปี จะมีคะแนนความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.27 แต้ม

หากอายุของลูกค้าเฉลี่ยภายในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 แต้ม คะแนนความพึงพอใจของลูกค้าคนที่มีอายุเท่าเดิมจะลดลง 0.31 แต้ม -> ซึ่งอธิบายแบบนี้เข้าใจยาก เพราะ ค่าเฉลี่ยอายุของโต๊ะเพิ่ม แต่อายุของลูกค้าที่สนใจยังเท่าเดิม แสดงว่าอายุคนอื่นในโต๊ะเปลี่ยนแปลง

หากอายุของลูกค้าเฉลี่ยภายในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 แต้ม คะแนนความพึงพอใจของลูกค้าจะลดลง 0.31 – 0.27 = 0.04 แต้ม (ยังไม่ทดสอบทางสถิติว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่)

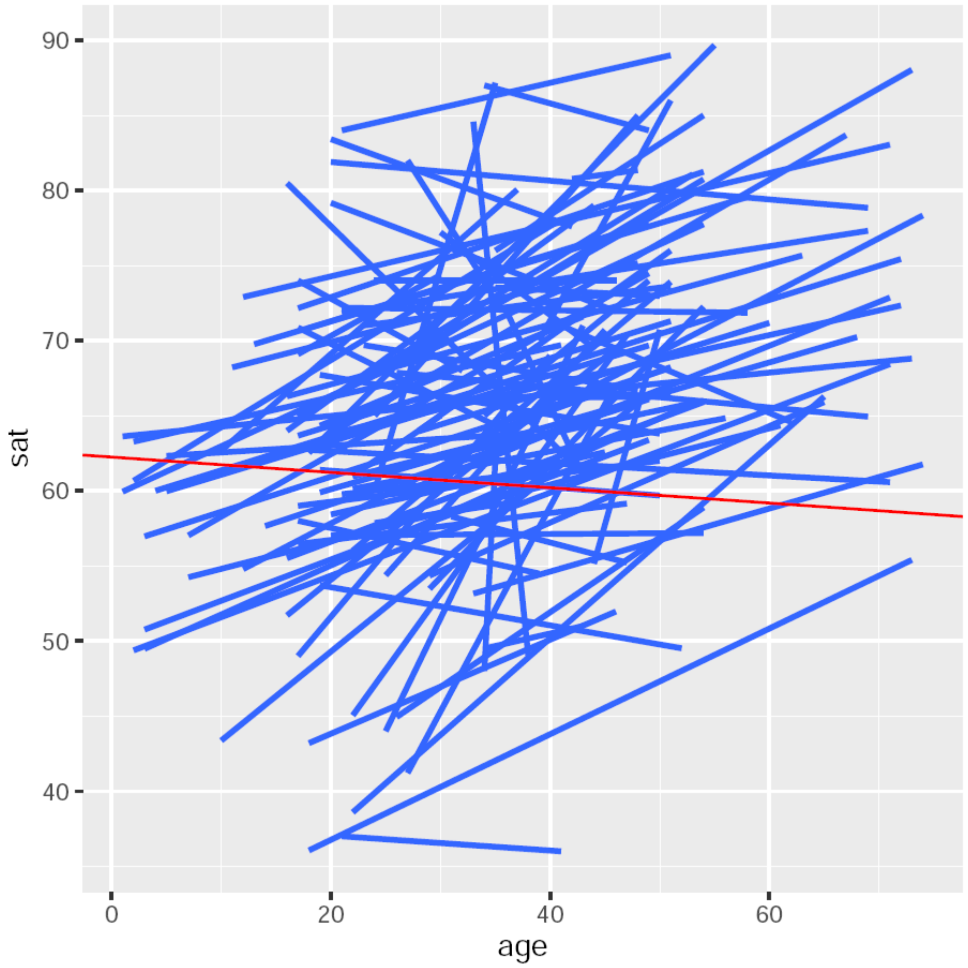
อิทธิพลของอายุระดับโต๊ะที่มีต่อความพึงพอใจลูกค้าต่ำกว่าอิทธิพลของอายุระดับภายในโต๊ะ 0.31 แต้มต่อปี ซึ่งความแตกต่างนี้ถึงระดับนัยสำคัญ

```
> library(ggplot2)
>
> dat3_1 <- dat3[dat3$tableid%%5 == 0,]
> out <- ggplot(dat3_1, aes(x=age, y=sat, group=tableid)) + geom_smooth(method=lm, se=FALSE)
> btwslope <- 0.267-0.318
> out + geom_abline(intercept=64.2875+(btwslope*0.318), slope=btwslope, color="red")
```

สีน้ำเงิน คือ อิทธิพลของอายุภายในโต๊ะ

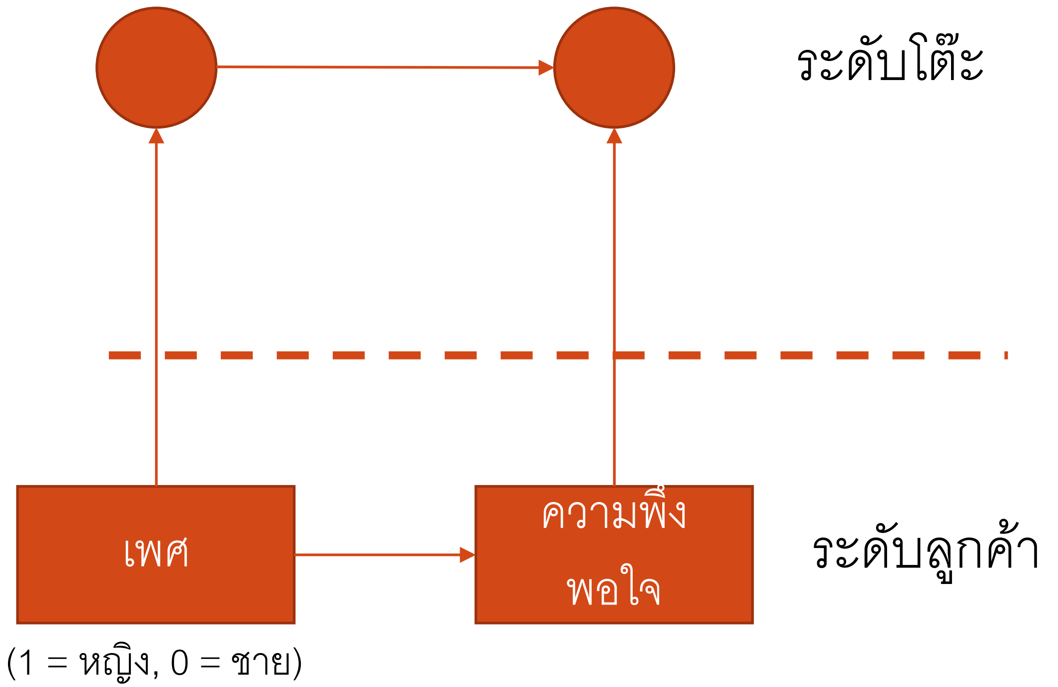
ในโมเดลจุดตัดแบบสุ่ม ตามหลักแล้ว ความชันของเส้นสีน้ำเงินจะเท่ากันหมด คือ 0.27 แต้มต่อปี ซึ่งหากไปถึงบทเรื่องโมเดลความชันแบบสุ่ม จะทดสอบว่า ความชันที่แตกต่างกันระหว่างกลุ่มนี้ถึงระดับนัยสำคัญหรือไม่

สีแดง คือ อิทธิพลของอายุระหว่างโต๊ะ



อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ



```
> dat3$avefemale <- ave(dat3$female, dat3$tableid)
> out3m4 <- lmer(sat ~ female + I(avefemale - 0.5) + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m4)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ female + I(avefemale - 0.5) + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16940.3  16968.9  -8465.1  16930.3     2257

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.15838 -0.63360 -0.00586  0.61192  2.75216

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 60.12    7.753
 Residual             75.45    8.686
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                   Estimate Std. Error t value
(Intercept)         65.0817     0.4513 144.209
female              -1.5293     0.4175  -3.663   sig
I(avefemale - 0.5)  -1.1253     1.5879  -0.709   no sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) female
female      -0.463
I(vfml-0.5)  0.078 -0.263
```

$$\rho = \frac{60.12}{60.12 + 75.45} = .44$$

$$\beta_{0j} = 65.08 - 1.13\left(\overline{X}_{1.j} - 0.5\right) + u_{0j};\ \beta_{1j} = -1.53$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}\left(u_{0j}\right) = 60.12$$

$$\mathrm{Var}\left(e_{ij}\right) = 75.45$$

$$\beta_{0j} = 65.08 - 1.13(W_{1j} - 0.5) + u_{0j}; \beta_{1j} = -1.53 \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 60.12$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 75.45$$

ลูกค้าเพศชาย ในโต๊ะที่มีเพศชาย 50% จะมีคะแนนความพึงพอใจ 65.08 แต้ม

ในโต๊ะเดียวกัน เพศชายจะมีความพึงพอใจมากกว่าเพศหญิง 1.53 แต้ม

ลูกค้าเพศชายในโต๊ะชายล้วน จะมีความพึงพอใจมากกว่าลูกค้าเพศชายในโต๊ะหญิงล้วน 1.13 แต้ม -> การตีความแบบนี้ค่อนข้างสับสน

โดยเฉลี่ยแล้ว โต๊ะชายล้วนจะมีความพึงพอใจมากกว่าโต๊ะหญิงล้วน 1.13 + 1.53 = 2.86 แต้ม ซึ่งยังไม่ได้ทดสอบว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่

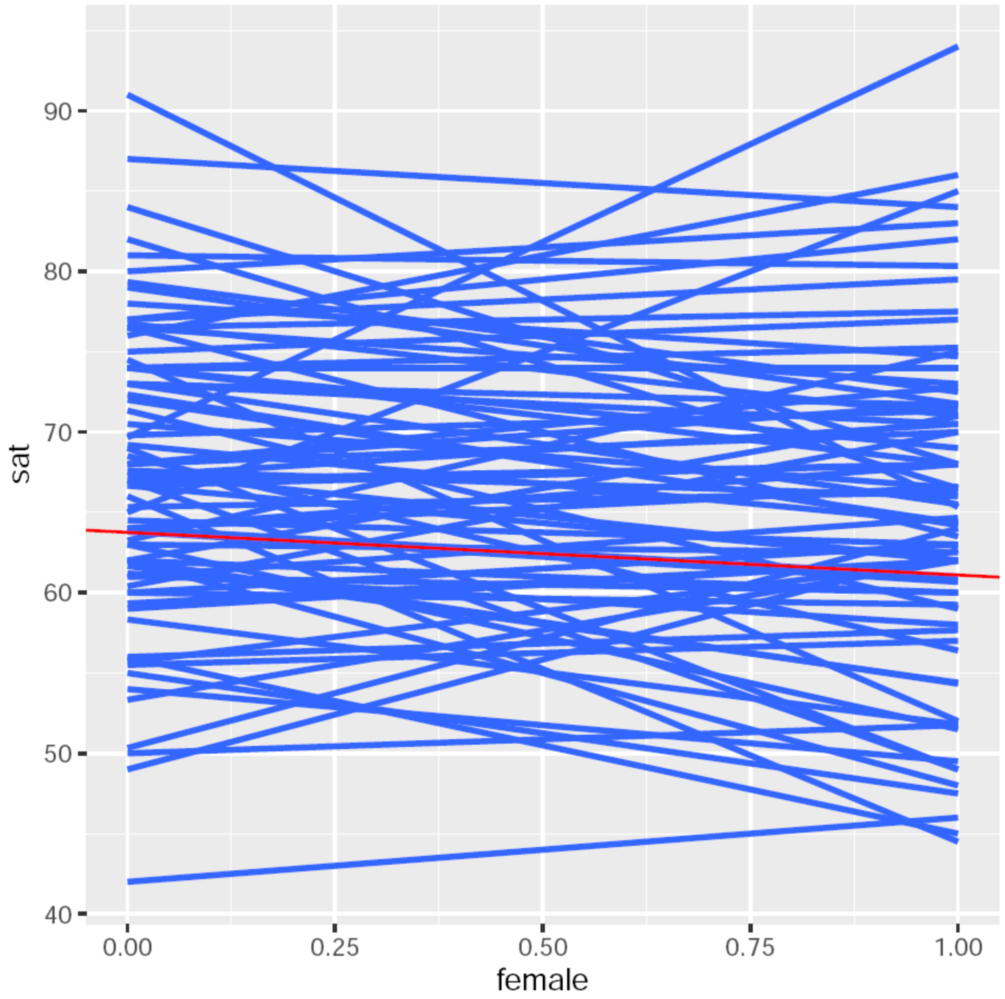
อิทธิพลของเพศในระดับโต๊ะ จะมีทิศทางในลบ (เพศชายความพึงพอใจสูงกว่า) รุนแรงกว่าอิทธิพลของเพศภายในโต๊ะ 1.13 แต้ม แต่ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

```
> dat3_1 <- dat3[dat3$tableid%%5 == 0,]
> out <- ggplot(dat3_1, aes(x=female, y=sat, group=tableid)) + geom_smooth(method=lm, se=FALSE)
> btwslope <- -1.5293-1.1253
> out + geom_abline(intercept=65.0817+(btwslope*0.5), slope=btwslope, color="red")
```

สีน้ำเงิน คือ อิทธิพลของเพศภายในโต๊ะ

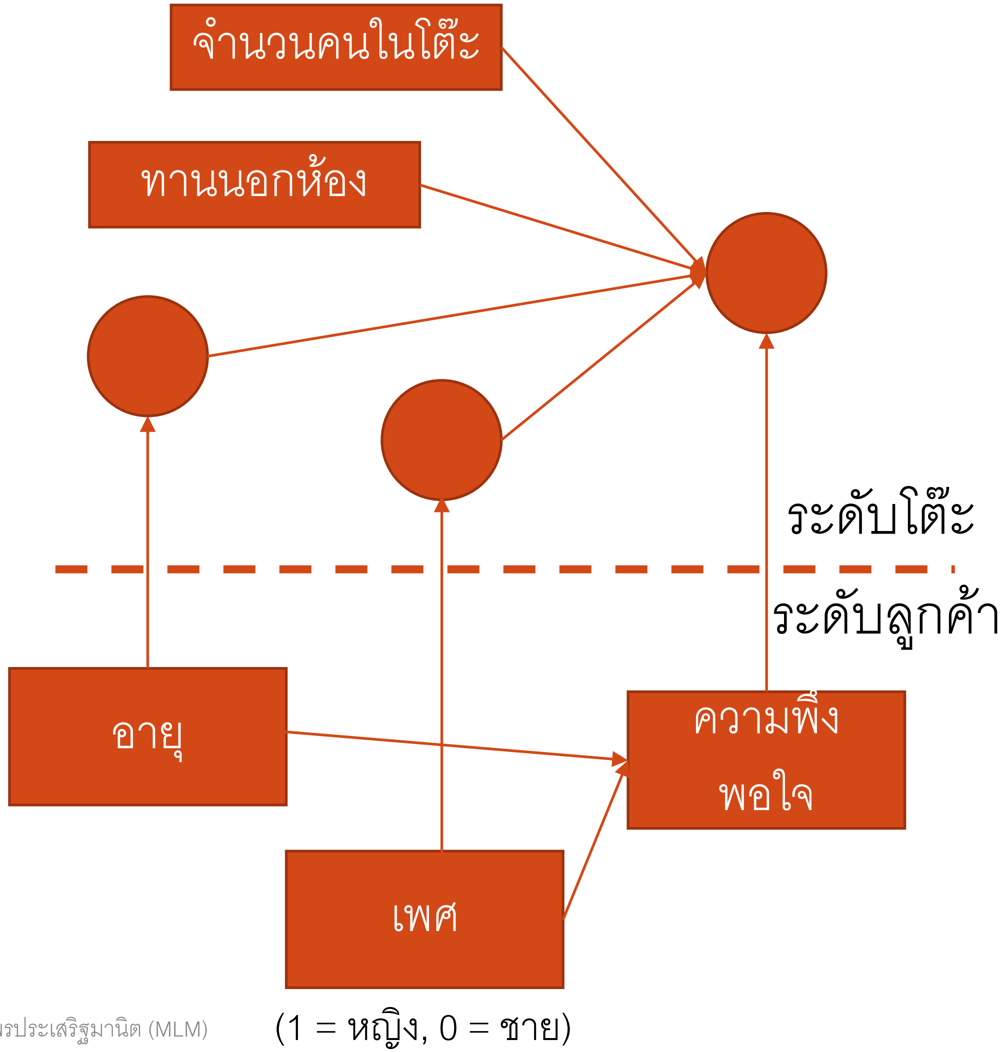
ในโมเดลจุดตัดแบบสุ่ม ตามหลักแล้ว
ความชันของเส้นสีน้ำเงินจะเท่ากันหมด
(เพศชายแตกต่างจากเพศหญิงเท่ากัน)
คือ ชายมากกว่าหญิง 1.53 แต้ม
ซึ่งหากไปถึงบทเรื่องโมเดลความชันแบบสุ่ม
จะทดสอบว่าความชันที่แตกต่างกันระหว่าง
กลุ่มนี้ถึงระดับนัยสำคัญหรือไม่

สีแดง คือ อิทธิพลของเพศระหว่างโต๊ะ



อิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ



```
> out3m5 <- lmer(sat ~ female + I(age - 40) + I(avefemale - 0.5) + I(aveage - 40)
 + I(numperson - 4) + outdoor + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m5)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ female + I(age - 40) + I(avefemale - 0.5) + I(aveage -
    40) + I(numperson - 4) + outdoor + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16522.6  16574.1  -8252.3  16504.6     2253

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.07246 -0.60940  0.00108  0.60756  2.92122

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 62.19    7.886
 Residual             59.70    7.726
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                   Estimate Std. Error t value
(Intercept)        64.11409    0.64109 100.008
female             -2.13297    0.37243  -5.727
I(age - 40)         0.27329    0.01268  21.560
I(avefemale - 0.5) -0.57699    1.55230  -0.372
I(aveage - 40)     -0.30041    0.06216  -4.832
I(numperson - 4)   -0.23366    0.19197  -1.217
outdoor             2.66961    0.79303   3.366

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) female I(g-40) I(-0.5 I(v-40) I(n-4)
female      -0.290
I(age - 40)  0.022 -0.075
I(vfml-0.5)  0.032 -0.240  0.018
I(aveag-40)  0.324  0.015 -0.204  -0.025
I(nmprsn-4) -0.220  0.000  0.000   0.007 -0.034
outdoor     -0.581  0.000  0.000  -0.005  0.089  -0.011
```

sig

not sig

$$\rho = \frac{62.19}{62.19 + 59.70} = .51$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 60.12 \quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 75.45$$

$$\beta_{0j} = 64.11 - 0.58(\bar{X}_{1.j} - 0.5) + 0.30(\bar{X}_{2.j} - 40) - 0.23(W_{1j} - 4) + 2.67W_{2j} + u_{0j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 40) + e_{ij} \qquad \beta_{1j} = -2.13 \qquad \beta_{2j} = 0.27$$

$$\beta_{0j} = 64.11 - 0.58(\bar{X}_{1.j} - 0.5) + 0.30(\bar{X}_{2.j} - 40) - 0.23(W_{1j} - 4) + 2.67W_{2j} + u_{0j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 40) + e_{ij} \qquad \beta_{1j} = -2.13 \qquad \beta_{2j} = 0.27$$

ลูกค้าเพศชายอายุ 40 ปี ในโต๊ะที่มีเพศชาย 50% อายุเฉลี่ย 40 ปี มีสมาชิก 4 คน และอยู่ในอาคาร จะมีคะแนนความพึงพอใจ 64.11 แต้ม

ในโต๊ะเดียวกัน ลูกค้าอายุเท่ากัน เพศชายจะมีความพึงพอใจมากกว่าเพศหญิง 2.13 แต้ม

ในโต๊ะเดียวกัน ลูกค้าเพศเดียวกัน ลูกค้าที่อายุมากขึ้น 1 ปี จะมีความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.27 แต้ม

$$\beta_{0j} = 64.11 - 0.58\left(\bar{X}_{1.j} - 0.5\right) + 0.30\left(\bar{X}_{2.j} - 40\right) - 0.23\left(W_{1j} - 4\right) + 2.67W_{2j} + u_{0j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}\left(X_{2ij} - 40\right) + e_{ij} \qquad \beta_{1j} = -2.13 \qquad \beta_{2j} = 0.27$$

เมื่อควบคุมอายุเฉลี่ยของโต๊ะ จำนวนสมาชิกโต๊ะ และสถานที่โต๊ะแล้ว ลูกค้าชายอายุ 40 ปีในโต๊ะชายล้วนจะมีคะแนนความพึงพอใจเฉลี่ยสูงกว่าลูกค้าชายอายุ 40 ปีในโต๊ะหญิงล้วน 0.58 แต้ม

เมื่อควบคุมอายุเฉลี่ยของโต๊ะ จำนวนสมาชิกโต๊ะ และสถานที่โต๊ะแล้ว โดยเฉลี่ยโต๊ะชายล้วนจะมีความพอพอใจมากกว่าโต๊ะหญิงล้วน 2.13 + 0.58 = 2.71 แต้ม ซึ่งยังไม่ได้ทดสอบว่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่

กล่าวคือ อิทธิพลของเพศระดับโต๊ะ ต่ำกว่าอิทธิพลของเพศระดับภายในโต๊ะ เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ อยู่ที่ 0.58 แต้มต่อปี ซึ่งไม่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

$$\beta_{0j} = 64.11 - 0.58(\bar{X}_{1.j} - 0.5) + 0.30(\bar{X}_{2.j} - 40) - 0.23(W_{1j} - 4) + 2.67W_{2j} + u_{0j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 40) + e_{ij} \qquad \beta_{1j} = -2.13 \qquad \beta_{2j} = 0.27$$

เมื่อควบคุมสัดส่วนเพศของโต๊ะ จำนวนสมาชิกโต๊ะ และสถานที่โต๊ะแล้ว หากอายุเฉลี่ยของโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ปี ลูกค้าชายอายุ 40 ปีในโต๊ะดังกล่าวจะมีความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.30 แต้ม

เมื่อควบคุม สัดส่วนเพศของโต๊ะ จำนวนสมาชิกโต๊ะ และสถานที่โต๊ะแล้ว โต๊ะที่มีลูกค้าอายุเฉลี่ยมากขึ้น 1 ปี จะมีความพึงพอใจเพิ่มขึ้น 0.30 + 0.27 = 0.57 แต้ม

อิทธิพลของอายุในระดับโต๊ะสูงกว่าอิทธิพลของอายุในระดับภายในโต๊ะ 0.30 แต้มต่อปี เมื่อควบคุมตัวแปรอื่นให้คงที่ ซึ่งความแตกต่างถึงระดับนัยสำคัญ

$$\beta_{0j} = 64.11 - 0.58(\bar{X}_{1.j} - 0.5) + 0.30(\bar{X}_{2.j} - 40) - 0.23(W_{1j} - 4) + 2.67W_{2j} + u_{0j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 40) + e_{ij} \qquad \beta_{1j} = -2.13 \qquad \beta_{2j} = 0.27$$

เมื่อควบคุม สัดส่วนเพศของโต๊ะ อายุเฉลี่ยของโต๊ะ และสถานที่โต๊ะแล้ว หากสมาชิกโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 คน คนที่เพศเดิม อายุเท่าเดิมความพึงพอใจจะลดลง = 0.23 แต้ม

เมื่อควบคุม สัดส่วนเพศของโต๊ะ อายุเฉลี่ยของโต๊ะ และจำนวนสมาชิกในโต๊ะแล้ว โต๊ะที่อยู่นอกร้าน จะได้รับความพึงพอใจมากกว่าโต๊ะที่อยู่ในร้าน 2.67 แต้มจากคนที่เพศเดิม อายุเท่าเดิม

ตัวอย่างการเขียนรายงานผล

- ตัวอย่างการเขียนรายงานนี้จะใส่รายละเอียดเท่าที่เนื้อหาได้ครอบคลุมมาในบทนี้ การเขียนรายงานแบบครบถ้วนจะแสดงหลังจากได้เรียนเรื่องการสร้างโมเดลและขนาดอิทธิพลแล้ว

ตัวอย่างการเขียนรายงานผล

- งานวิจัยนี้ต้องการศึกษาปัจจัยที่ส่งผลต่อความพึงพอใจของลูกค้าภายในร้านอาหาร ลักษณะของข้อมูลเป็นลูกค้าจำนวน 2,262 คน ซ้อนอยู่ในกลุ่มลูกค้าที่มาทานอาหารด้วยกัน 500 โต๊ะ ความสัมพันธ์ภายในชั้น (Intraclass Correlation; ICC) ของความพึงพอใจของลูกค้าเท่ากับ .44
- ปัจจัยที่ใช้ทำนายความพึงพอใจลูกค้ามี 4 ปัจจัย คือ เพศของลูกค้า อายุของลูกค้า จำนวนลูกค้าในแต่ละกลุ่ม และการทานอาหารกลางแจ้ง (เทียบกับในร่ม) สองปัจจัยแรกจะเป็นปัจจัยระดับลูกค้า และสองปัจจัยหลังจะเป็นปัจจัยระดับกลุ่ม ในการวิเคราะห์ครั้งนี้ สัดส่วนของเพศหญิงในแต่ละกลุ่ม และอายุเฉลี่ยของลูกค้าแต่ละกลุ่ม จะถูกคำนวณและนำไปใส่ในโมเดลด้วย ผลได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงปัจจัยทำนายความพึงพอใจของลูกค้า (N = 2,262) ที่ซ้อนอยู่ในกลุ่มที่มาด้วยกัน (K = 500) ในการใช้บริการร้านอาหาร

ปัจจัย	*b*
จุดตัด	64.11**
เพศ (1 = หญิง, 0 = ชาย)	-2.13**
อายุ	0.27**
สัดส่วนเพศในกลุ่ม[a]	-0.58
อายุเฉลี่ยในกลุ่ม[b]	-0.30**
จำนวนสมาชิกกลุ่ม	-0.23
โต๊ะกลางแจ้ง	2.67**

*p < .05, **p < .01, อายุและอายุเฉลี่ยย้ายศูนย์กลางไปที่ 40 ปี จำนวนสมาชิกย้ายศูนย์กลางไปที่ 4 คน และสัดส่วนเพศย้ายศูนย์กลางไปที่ 0.5

[a]ค่า b = -0.58 ของสัดส่วนเพศในกลุ่ม จะแสดงถึงความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของเพศภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม ค่าอิทธิพลระหว่างกลุ่มของเพศเท่ากับ -2.13-0.58 = -2.71

[b]ค่า b = -0.30 ของอายุเฉลี่ยในกลุ่ม จะแสดงถึงความแตกต่างระหว่างอิทธิพลของอายุภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม ค่าอิทธิพลระหว่างกลุ่มของอายุเท่ากับ 0.27-0.30 = -0.03

ตัวอย่างการเขียนรายงานผล

- ผลการวิเคราะห์พบว่าเพศมีผลต่อความพึงพอใจ โดยกลุ่มเพศชายล้วนจะมีความพึงพอใจมากกว่ากลุ่มเพศหญิงล้วน (b = -2.71, ยังไม่ได้ทดสอบนัยสำคัญ) แต่เมื่อเทียบภายในกลุ่มเดียวกัน พบว่าเพศหญิงมีความพึงพอใจต่อการใช้บริการน้อยกว่าเพศชายอย่างมีนัยสำคัญ (b = -2.13) อิทธิพลของอายุระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่มแตกต่างกัน โดยโต๊ะที่ลูกค้าอายุเฉลี่ยสูงขึ้น จะมีความพึงพอใจลดลงเล็กน้อย (b = -0.03, ยังไม่ได้ทดสอบนัยสำคัญ) และเมื่อเปรียบเทียบในกลุ่มเดียวกัน สมาชิกที่มีอายุมากกว่าจะพึงพอใจมากกว่าสมาชิกที่อายุน้อยกว่า (b = 0.27)
- เมื่อตรวจสอบปัจจัยระดับกลุ่ม พบว่าจำนวนสมาชิกในกลุ่มไม่มีอิทธิพลต่อความพึงพอใจอย่างมีนัยสำคัญ และกลุ่มลูกค้าที่เลือกนั่งโต๊ะกลางแจ้ง มีแนวโน้มพึงพอใจมากกว่ากลุ่มลูกค้าที่เลือกนั่งในร่มอย่างมีนัยสำคัญ โปรดอย่าลืมว่าอิทธิพลของตัวแปรทั้งหมดในที่นี้ คือ อิทธิพลที่ควบคุมตัวแปรอิสระตัวอื่นให้คงที่

คาบต่อไป

- โมเดลความชันแบบสุ่ม (Random Slope Model)
- การบ้านที่ 3

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 15 + 0.001W_j + u_{0j} \qquad u_{0j} \sim N(0, 20)$$
$$\beta_{1j} = -2$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 25)$

L2: $\beta_{0j} = 70 - 0.1W_j + u_{0j}$ $\quad u_{0j} \sim N(0, 20)$

$\beta_{1j} = 1$

- Y_{ij} = คะแนนเจตคติต่อหน้าของคนแปลกหน้าที่ขึ้นอยู่บนจอ โดยมีหลายหน้าซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง
- X_{ij} = ความคมชัดของรูป
- W_j = อายุของผู้เข้าร่วมการทดลอง

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$ $\qquad e_{ij} \sim N(0, 25)$

L2: $\beta_{0j} = 40 + 0.005W_{1j} + 1.2W_{2j} + u_{0j}$ $\qquad u_{0j} \sim N(0, 25)$

$\beta_{1j} = 1.1$

- Y_{ij} = ผลการปฏิบัติงาน
- X_{ij} = ประสบการณ์ทำงาน (ปี)
- W_{1j} = ขนาดของบริษัท (คน)
- W_{2j} = ค่าเฉลี่ยของเงินที่เพิ่มขึ้น (หน่วยเท่ากับหมื่นบาท)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 36)$

L2: $\beta_{0j} = 45 - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j}$ $\quad u_{0j} \sim N(0, 7)$

$\beta_{1j} = 19$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 12 + 10W_j + u_{0j} \qquad u_{0j} \sim N(0, 20)$$
$$\beta_{1j} = 8$$
$$\beta_{2j} = 8$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{1ij} = จำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการเตรียมตัว
- X_{2ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์การเรียนของปีที่แล้ว
- W_j = มีบริการติวเตอร์ (1 = มี, 0 = ไม่มี)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 25)$

L2: $\beta_{0j} = 70 - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j}$ $\quad u_{0j} \sim N(0, 6)$

$\beta_{1j} = 19$

$\beta_{2j} = -0.2$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{1ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- X_{2ij} = ความเครียดในแต่ละวัน
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 20)$

L2: $\beta_{0j} = 150 + 30\bar{X}_{1ij} + u_{0j}$ $\quad u_{0j} \sim N(0, 10)$

$\beta_{1j} = 120$

- Y_{ij} = จำนวนวันที่โดนพิพากษาจำคุก (วัน) ของแต่ละคดีอาญาฉ้อโกงซ้อนอยู่ในศาล
- X_{1ij} = ประเภทคดีที่จำแนกจากผู้ฟ้อง (1 = อัยการฟ้อง, 0 = ผู้เสียหายฟ้องเอง)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 35) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 20)$

L2:
$$\beta_{0j} = 45 + 0.2(\bar{X}_{1ij} - 35) + 0.5\bar{X}_{2ij} + u_{0j} \qquad u_{0j} \sim N(0, 10)$$
$$\beta_{1j} = 0.2$$
$$\beta_{2j} = -0.5$$

- Y_{ij} = เจตคติต่อนายกรัฐมนตรีของสมาชิกซ้อนในครอบครัว
- X_{1ij} = อายุของผู้ประเมินเจตคติ
- X_{2ij} = เพศของผู้ประเมินเจตคติ (1 = หญิง, 0 = ชาย)