โมเดลความชันแบบสุ่ม (Random Slope Model)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- การเปรียบเทียบสัดส่วนความเป็นไปได้
- โมเดลความชันแบบสุ่ม

การเปรียบเทียบสัดส่วนความเป็นไปได้

- การทดสอบสัดส่วนความเป็นไปได้ (Likelihood Ratio Test) หรือที่เรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการทดสอบความเบี่ยงเบน (Deviance Test) ซึ่งเป็นวิธีการเดียวในการทดสอบความแปรปรวน
  - โมเดลเต็ม (Full Model: M0) หรือโมเดลต้น (Parent Model) เป็นโมเดลที่ประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมด
  - โมเดลจำกัด (Restricted Model: M1) หรือโมเดลซ้อน (Nested Model) เป็นโมเดลที่ไม่ได้ประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดที่โมเดลเต็มได้วิเคราะห์
- โมเดลเต็มจะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ทุกค่าที่โมเดลจำกัดประมาณค่า

การเปรียบเทียบสัดส่วนความเป็นไปได้

```
> dat1 <-read.table("lecture4ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> library(lme4)
> out1r <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
> out1f <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1|groupid), data=dat1, REML=FALSE)
```

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20}$$

ระดับที่ 2

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = \sigma^2$$

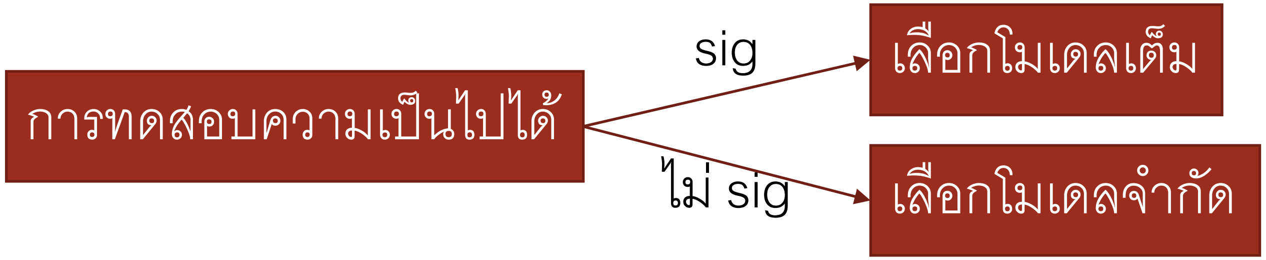
$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = \tau_{00}$$

พารามิเตอร์สีแดง ได้รับการประมาณค่าจากโมเดลทั้งสองโมเดล

พารามิเตอร์สีเขียว ได้รับการประมาณค่าเฉพาะโมเดลเต็ม

การเปรียบเทียบสัดส่วนความเป็นไปได้

- ค่าความเป็นไปได้ (Likelihood) ของทั้งสองโมเดลจะนำมาเปรียบเทียบกัน ถ้าค่าความเป็นไปได้ของทั้ง 2 โมเดลไม่แตกต่างกัน โมเดลที่ประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าหรือโมเดลจำกัด (Restricted Model) จะดีกว่า
- แต่ถ้าค่าความเป็นไปได้แตกต่างกันมาก แสดงว่าการเพิ่มค่าพารามิเตอร์เป็นเรื่องที่จำเป็น
- การเปรียบเทียบค่าความเป็นไปได้ จะมีค่าสถิติทดสอบเป็น χ^2 โดย *df* เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน



การเปรียบเทียบสัดส่วนความเป็นไปได้

```
> anova(out1r, out1f)
Data: dat1
Models:
out1r: consume ~ 1 + I(length - 15) + (1 | groupid)
out1f: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 | groupid)
      Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out1r  4 4131.8 4150.6 -2061.9   4123.8
out1f  5 4127.7 4151.2 -2058.8   4117.7 6.1466      1    0.01317 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- สองโมเดลนี้แตกต่างกันที่การเพิ่มขึ้นของตัวแปรสีของปลาทอง ซึ่งผลถึงระดับนัยสำคัญ แสดงว่าสีของปลามีผลต่อการกินอาหารปลาอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อควบคุมความยาวของปลา
- วิธีการทดสอบนี้ สามารถทดสอบพารามิเตอร์หลายตัวได้พร้อมกัน (เช่น การทดสอบตัวแปรจัดกลุ่มที่มีมากกว่า 2 กลุ่ม) และทดสอบอิทธิพลสุ่มซึ่งกล่าวถึงเป็นเนื้อหาถัดไป

โมเดลความชันแบบสุ่ม

- ใส่ตัวแปรอิสระในระดับที่ 1 มีขนาดอิทธิพลแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$ ระดับที่ 2

- $Y_{ij}, X_{1ij}, X_{2ij}, W_{1j}, W_{2j}, \beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, e_{ij}, u_{0j}, \gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{02}$ แปลความหมายเหมือนกับโมเดลจุดตัดแบบสุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

- γ_{00} คือ ค่าของตัวแปรตาม เมื่อ X_1, X_2 มีค่าเท่ากับ 0 เฉลี่ยทุกกลุ่ม
- γ_{10} คือ ค่าของ Y ที่เปลี่ยนแปลงไปเฉลี่ยทุกกลุ่ม เมื่อค่า X_1 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม เมื่อควบคุม X_2 ให้คงที่
- γ_{20} คือ ค่าของ Y ที่เปลี่ยนแปลงไปเฉลี่ยทุกกลุ่ม เมื่อค่า X_2 เพิ่มขึ้น 1 แต้ม เมื่อควบคุม X_1 ให้คงที่
- u_{1j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของความชันของ X_1 ของกลุ่มที่ j ออกจากค่าเฉลี่ย
- u_{2j} คือ ค่าเบี่ยงเบนของความชันของ X_2 ของกลุ่มที่ j ออกจากค่าเฉลี่ย

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

- ค่าสีแดง จะเรียกว่าอิทธิพลถาวร (Fixed Effect) ซึ่งไม่มีความแตกต่างระหว่างบุคคลหรือกลุ่ม
- ค่าสีม่วง จะเรียกว่าอิทธิพลสุ่ม (Random Effect) ซึ่งเป็นค่าที่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม ซึ่งบางครั้งอาจเรียกว่าตัวแปรแฝง (Latent Variable)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

- ข้อตกลงเบื้องต้นของโมเดลพหุระดับ เป็นดังนี้
  - ตัวแปรสุ่มในระดับที่ 1 มีการกระจายเป็นโค้งปกติ และเป็นอิสระจากกัน

$$e_{ij} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \quad i.i.d$$

  - ตัวแปรสุ่มในระดับที่ 2 มีการกระจายเป็นโค้งปกติแบบพหุ และเป็นอิสระจากกัน

$$\mathbf{u}_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{T}) \quad i.i.d$$

หรือ $$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{00} & & \\ \tau_{01} & \tau_{11} & \\ \tau_{02} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix}\right) \quad i.i.d$$

$$e_{ij} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \quad i.i.d$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{00} & & \\ \tau_{01} & \tau_{11} & \\ \tau_{02} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \right) \quad i.i.d$$

- *i.i.d* (Independently and Identically Distributed) คือ การกระจายของ e_{ij} ของแต่ละคน หรือ $[u_{0j} \quad u_{1j} \quad u_{2j}]'$ ของแต่ละกลุ่ม จะต้อง
  - เป็นอิสระจากกัน ค่าความผิดพลาด (Error) จากคนหรือกลุ่มหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางใด จะต้องไม่บอกใบ้การเปลี่ยนแปลงของอีกตัวหนึ่ง
  - เป็นการกระจายแบบเดียวกัน ซึ่งคือ โค้งปกติที่ค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน (หรือความแปรปรวนร่วม) คงที่ (Homoscedasticity)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

ระดับที่ 2

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$
$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{00} & & \\ \tau_{01} & \tau_{11} & \\ \tau_{02} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \right)$$

- ในโมเดลที่ไม่มีตัวแปรต้นในระดับที่ 2 ค่าความแปรปรวนร่วมมีความหมายดังนี้
  - τ_{00} = ความแปรปรวนของจุดตัดแกน *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - τ_{11} = ความแปรปรวนของความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y*
  - τ_{22} = ความแปรปรวนของความชันของ X_2 ที่มีต่อ *Y*
  - τ_{01} = ความแปรปรวนร่วมของจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - τ_{02} = ความแปรปรวนร่วมของจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_2 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - τ_{12} = ความแปรปรวนร่วมของความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* และความชันของ X_2 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

ระดับที่ 2

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$
$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{00} & & \\ \tau_{01} & \tau_{11} & \\ \tau_{02} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \right)$$

- ท่านสามารถหาค่าสหสัมพันธ์ของอิทธิพลสุ่มในระดับที่ 2 ได้
  - $\rho_{01} = \tau_{01}/\sqrt{\tau_{00} \cdot \tau_{11}}$ คือ สหสัมพันธ์ระหว่างจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - $\rho_{02} = \tau_{02}/\sqrt{\tau_{00} \cdot \tau_{22}}$ คือ สหสัมพันธ์ระหว่างจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_2 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - $\rho_{12} = \tau_{12}/\sqrt{\tau_{11} \cdot \tau_{22}}$ คือ สหสัมพันธ์ระหว่างความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* และความชันของ X_2 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_{1j} + \gamma_{02}W_{2j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{00} & & \\ \tau_{01} & \tau_{11} & \\ \tau_{02} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} \right)$$

- ถ้ามีตัวแปรต้นในระดับที่ 2 ความหมายของค่าคงเหลือระดับที่สองจะเปลี่ยนไป ซึ่งสืบเนื่องไปถึงค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมทั้งหมด เช่น
  - τ_{01} = ความแปรปรวนร่วมของค่าคงเหลือของจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
  - ρ_{01} = ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างค่าคงเหลือของจุดตัดแกน *Y* และความชันของ X_1 ที่มีต่อ *Y* ระหว่างกลุ่ม
- โมเดลนี้จะเรียกว่าโมเดลความชันแบบสุ่ม (Random Slope Model) เนื่องจากความชันของตัวแปรอิสระระดับที่ 1 แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

โมเดลความชันแบบสุ่ม

- การทดสอบความชันแบบสุ่ม จะใช้การทดสอบความเป็นไปได้ โดยปกติจะเริ่มต้นจากโมเดลที่ไม่มีความชันแบบสุ่ม แล้วทดสอบความชันแบบสุ่มของตัวแปรทีละตัว

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

ระดับที่ 2

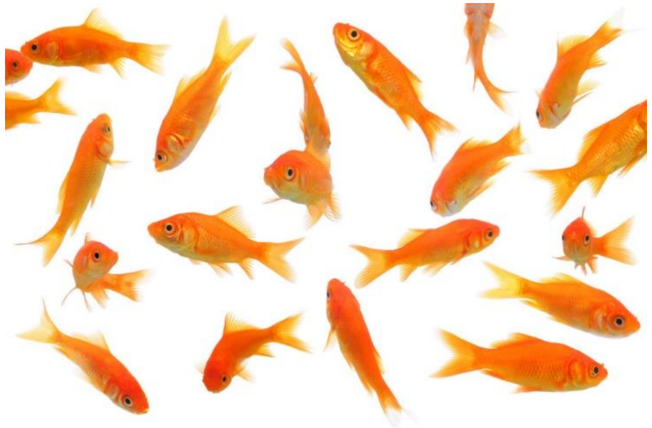
โมเดลเต็ม 1	โมเดลจำกัด	โมเดลเต็ม 2
$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$
$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$	$\beta_{1j} = \gamma_{10}$	$\beta_{1j} = \gamma_{10}$
$\beta_{2j} = \gamma_{20}$	$\beta_{2j} = \gamma_{20}$	$\beta_{2j} = \gamma_{20} + u_{2j}$

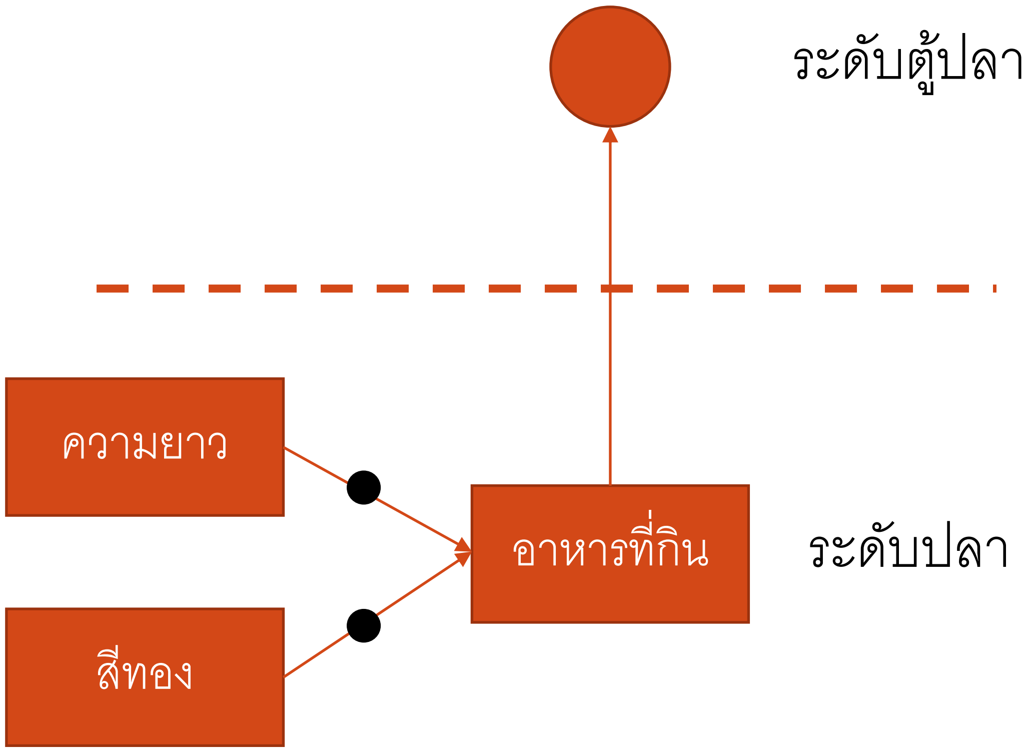
ทดสอบว่า τ_{11} และ τ_{01} แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

ทดสอบว่า τ_{22} และ τ_{02} แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ

โมเดลความชันแบบสุ่ม

ทำนายปริมาณอาหารที่ปลาทองกิน
ด้วยความยาวของปลา และสีของปลา





ใส่ในกรณีที่วิธีการประมาณค่าแบบปกติ ไม่สามารถหาค่าได้สำเร็จ (Fail to Converge)

```
> library(lme4)
> out1m0 <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1|groupid), data=dat1,
+               REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
>
> out1m0a <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + I(length - 15)|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> out1m0b <- lmer(consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + goldcolor|groupid),
+               data=dat1, REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
>
```

ใส่ตัวแปรที่ต้องการให้ความชันแปรผันกันระหว่างกลุ่ม

```
> anova(out1m0, out1m0a)
Data: dat1
Models:
out1m0: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 | groupid)
out1m0a: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + I(length - 15) |
out1m0a:     groupid)
        Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out1m0   5 4127.7 4151.2 -2058.8   4117.7
out1m0a  7 4109.4 4142.3 -2047.7   4095.4 22.299      2  1.438e-05 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ความชันของความยาวของปลาแตกต่างกันระหว่างกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญ

```
> anova(out1m0, out1m0b)
Data: dat1
Models:
out1m0: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 | groupid)
out1m0b: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + goldcolor | groupid)
        Df    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out1m0   5 4127.7 4151.2 -2058.8   4117.7
out1m0b  7 4131.1 4164.0 -2058.6   4117.1 0.5479      2     0.7604
```

ความชันของสีของปลา ไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญ

```
> summary(out1m0a)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + I(length - 15) + goldcolor + (1 + I(length - 15) |      groupid)
   Data: dat1
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid 
  4109.4   4142.3  -2047.7   4095.4      804 

Scaled residuals: 
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.2693 -0.6408  0.0377  0.6230  2.8841 

Random effects:
 Groups   Name           Variance Std.Dev. Corr
 groupid  (Intercept)    19.36131 4.4001       
          I(length - 15)  0.01636 0.1279   0.67
 Residual                 5.97388 2.4442       
Number of obs: 811, groups:  groupid, 100

Fixed effects:
               Estimate Std. Error t value
(Intercept)    39.28800    0.46021  85.370   sig
I(length - 15)  0.87494    0.02321  37.694   sig
goldcolor      -0.46422    0.18375  -2.526   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) I(-15)
I(lngth-15)  0.394       
goldcolor   -0.203  0.026
```

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$$

$$\beta_{0j} = 39.29 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.87 + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.46$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 19.36$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.017$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 5.97$$

$$\beta_{0j} = 39.29 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.87 + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.46$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 19.36$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.017$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 5.97$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$$

ปลาที่ไม่ได้มีสีทอง ความยาว 15 ซม. จะมีการกินอาหารเฉลี่ย 39.29 เม็ดต่อวัน

ภายในปลาสีเดียวกัน หากปลามีความยาวเพิ่มขึ้น 1 ซม. จะมีการกินอาหารเพิ่มขึ้น 0.87 เม็ดต่อวันโดยเฉลี่ย

ภายในปลาที่มีความยาวเท่ากัน ปลาสีอื่นจะมีการกินอาหารเม็ดมากกว่าปลาสีทอง 0.46 เม็ดต่อวัน

$\beta_{0j} = 39.29 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.87 + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.46$

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$

$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 19.36$

$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.017$

$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 5.97$

$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$

ปลาที่ไม่ได้มีสีทอง ความยาว 15 ซม. ภายในแต่ละตู้ปลา จะมีการกินอาหารเฉลี่ยอยู่ในช่วงเชื่อมัน 95% เท่ากับ $\gamma_{00} \pm z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\tau_{00}} = 39.29 \pm 1.96 \cdot \sqrt{19.36}$

= (30.67, 47.91) เม็ดต่อวัน

ภายในปลาสีเดียวกัน เมื่อปลามีความยาวเพิ่มขึ้น 1 ซม. การกินอาหารของปลาแต่ละตู้อยู่ในช่วงเชื่อมัน 95% เท่ากับ $\gamma_{10} \pm z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\tau_{11}} = 0.87 \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.017}$

= (0.61, 1.13) เม็ดต่อวัน

$\beta_{0j} = 39.29 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.87 + u_{1j}; \beta_{2j} = -0.46$

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - 15) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$

$\text{Var}(u_{0j}) = 19.36$

$\text{Var}(u_{1j}) = 0.017$

$\text{Var}(e_{ij}) = 5.97$

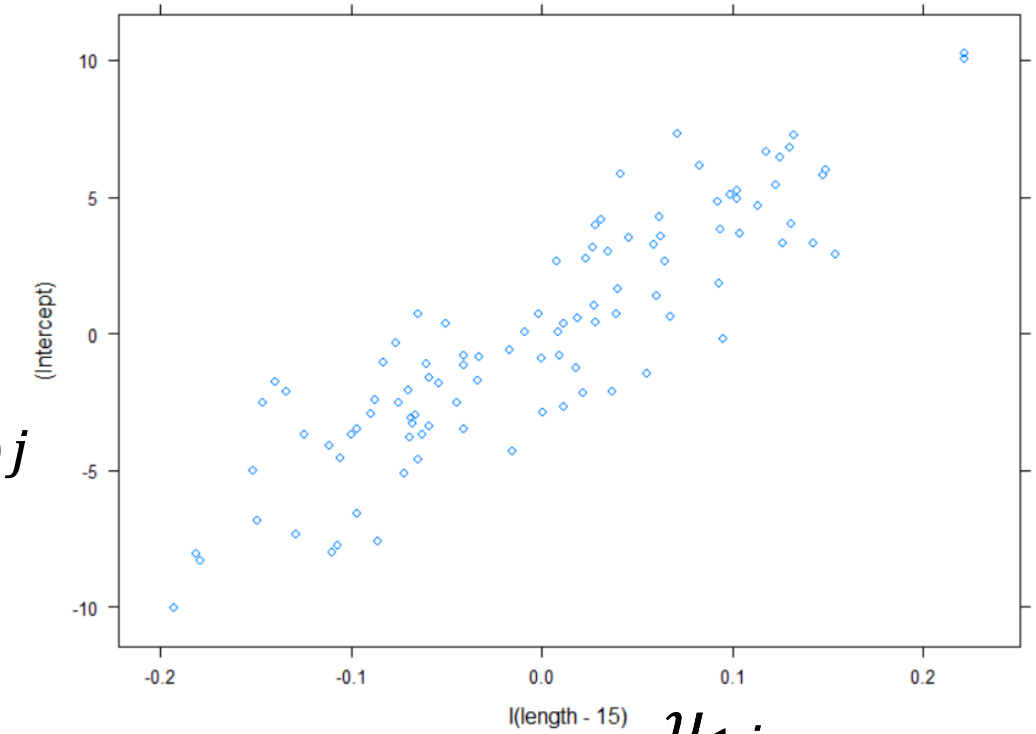
$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .67$

ตู้ปลาที่ปลาไม่ได้มีสีทอง ความยาว 15 ซม. มีการกินอาหารปลาสูง จะมีแนวโน้มที่อิทธิพลของความยาวที่มีต่อการกินอาหารปลาเพิ่มขึ้น เทียบเท่ากับค่าสหสัมพันธ์ .67

หาอิทธิพลสุ่มระหว่างกลุ่ม

```
> ranef1m0a <- ranef(out1m0a)
> plot(ranef1m0a)
```

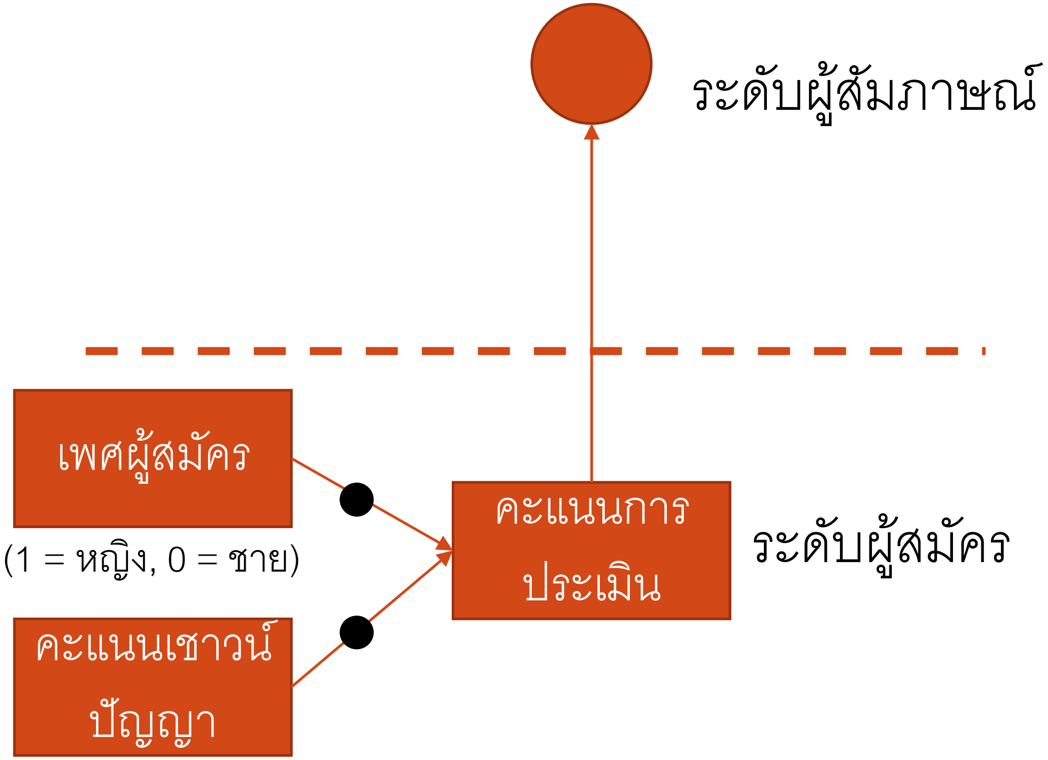
u_{0j}



u_{1j}

โมเดลความชันแบบสุ่ม

ทดสอบว่าเพศผู้สมัครและคะแนนเชาวน์ปัญญา มีผลต่อคะแนนการประเมินแตกต่างกันระหว่างกลุ่มหรือไม่



เปลี่ยน IQ เป็นคะแนนมาตรฐาน เพื่อให้โมเดลประมาณค่าได้

```
> dat2 <-read.table("lecture4ex2.csv", sep=",", header=TRUE)
> out2m0 <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1|erid), data=dat2,
+               REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> out2m0a <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 + eesex|erid), data=dat2,
+               REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> out2m0b <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 + I(scale(iq))|erid), data=dat2,
+               REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out2m0, out2m0a)
```

ใส่ตัวแปรที่ต้องการให้ความชันแปรผันกันระหว่างกลุ่ม

ความแตกต่างของคะแนนประเมินระหว่างผู้สมัครเพศชายและหญิงแตกต่างกันระหว่างผู้สัมภาษณ์อย่างมีนัยสำคัญ

```
Data: dat2
Models:
out2m0: score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 | erid)
out2m0a: score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 + eesex | erid)
        Df   AIC   BIC logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out2m0   5 61676 61712 -30833    61666
out2m0a  7 61669 61719 -30828    61655 11.183      2   0.00373 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> anova(out2m0, out2m0b)
```

ความชันของ IQ ที่มีต่อคะแนนประเมินไม่แตกต่างกันระหว่างผู้สัมภาษณ์อย่างมีนัยสำคัญ

```
Data: dat2
Models:
out2m0: score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 | erid)
out2m0b: score ~ 1 + eesex + I(scale(iq)) + (1 + I(scale(iq)) | erid)
        Df   AIC   BIC logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out2m0   5 61676 61712 -30833    61666
out2m0b  7 61680 61730 -30833    61666 0.6003      2     0.7407
```

```
> out2m0a <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1 + eesex|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m0a)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + (1 + eesex | erid)
   Data: dat2

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 61669.0  61719.4 -30827.5  61655.0     9993

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6718 -0.6331 -0.0005  0.6408  3.3843

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 erid     (Intercept) 20.115   4.485
          eesex        1.086   1.042    0.11
 Residual             21.765   4.665
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.543630   0.156424 482.943   sig
eesex        0.123562   0.098957   1.249   no sig
I(iq - 100)  0.029552   0.003304   8.945   sig

Correlation of Fixed Effects:
            (Intr) eesex
eesex       -0.249
I(iq - 100) -0.002 -0.007
```

ทดสอบแล้ว พบว่าความชันของ IQ ไม่แตกต่างกันระหว่างกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อไม่มีความชันแบบสุ่ม IQ สเกลปกติสามารถประมาณค่าได้ จึงกลับมาใช้สเกลปกติ

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .11$$

$$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.12$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 1.09$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 21.77$$

$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$

$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .11$

$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.12$

$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 1.09$

$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 21.77$

คะแนนที่ผู้สัมภาษณ์ประเมินผู้สมัครเพศชาย ที่มีระดับ IQ เท่ากับ 100 เท่ากับ 75.54 คะแนน

ผู้สมัครเพศหญิงได้รับคะแนนประเมินสูงกว่าเพศชาย 0.12 คะแนนโดยเฉลี่ย เมื่อควบคุม IQ ให้คงที่ ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

หากผู้สมัครมีคะแนน IQ สูงขึ้น 1 หน่วย จะได้รับคะแนนประเมินสูงขึ้น 0.03 แต้ม เมื่อควบคุมเพศของผู้สมัครให้คงที่

$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$

$Cor(u_{0j}, u_{1j}) = .11$

$Var(u_{0j}) = 20.12$

$Var(u_{1j}) = 1.09$

$Var(e_{ij}) = 21.77$

คะแนนที่ผู้สัมภาษณ์ประเมินผู้สมัครเพศชาย ที่มีระดับ IQ เท่ากับ 100 อยู่ใน

ช่วงเชื่อมัน 95% เท่ากับ $75.54 \pm 1.96 \cdot \sqrt{20.12}$ = (66.75, 84.33) คะแนน

หากผู้สมัครมี IQ ระดับเดียวกัน ผู้สมัครเพศหญิงได้รับคะแนนประเมินมากกว่าเพศชาย แตกต่างกันระหว่างผู้สัมภาษณ์ โดยอยู่ในช่วงเชื่อมัน 95% เท่ากับ

$0.12 \pm 1.96 \cdot \sqrt{1.09}$ = (-1.93, 2.17) คะแนน

$$\beta_{0j} = 75.54 + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .11$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.12$$

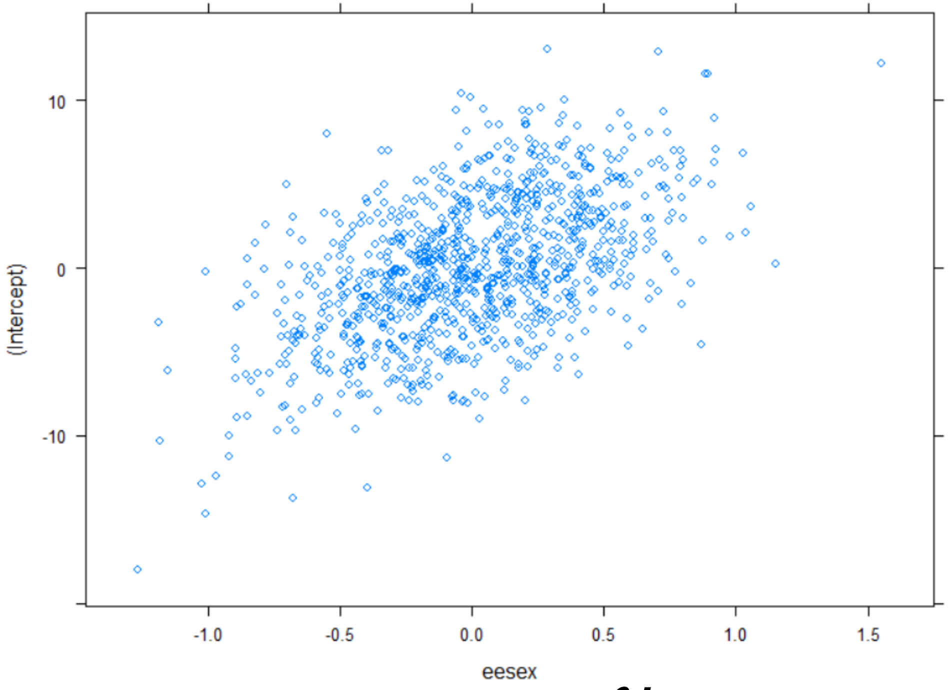
$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 1.09$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 21.77$$

คะแนนที่ผู้สัมภาษณ์ประเมินผู้สมัครเพศชาย ที่มีระดับ IQ เท่ากับ 100 และการประเมินความแตกต่างระหว่างเพศ มีความสัมพันธ์ทางบวกเล็กน้อย อยู่ที่ค่าสหสัมพันธ์เท่ากับ .11

```
> ranef2m0a <- ranef(out2m0a)
> plot(ranef2m0a)
```

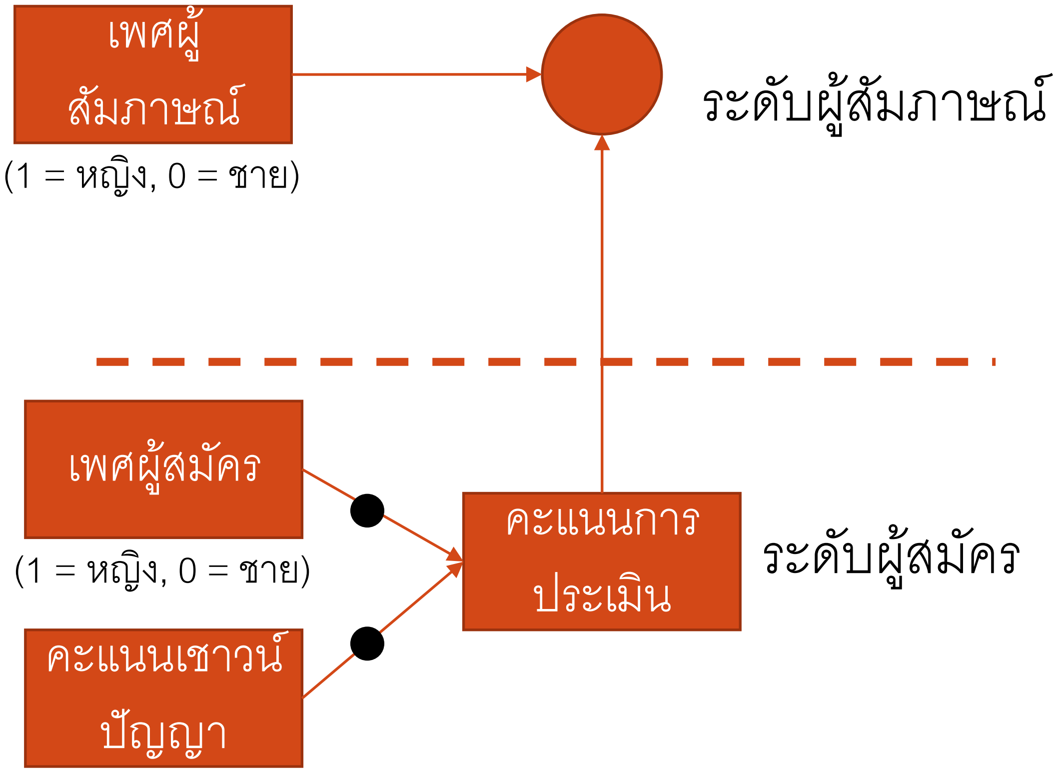
u_{0j}



u_{1j}

โมเดลความชันแบบสุ่ม

ทดสอบว่าเพศผู้สมัครและคะแนนเชาวน์ปัญญา มีผลต่อคะแนนการประเมินแตกต่างกันระหว่างกลุ่มหรือไม่ โดยมีเพศผู้สัมภาษณ์ในสมการด้วย



```
> out2m0c <- lmer(score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + (1 + eesex|erid), data=dat2, REML=FALSE)
> summary(out2m0c)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + I(iq - 100) + ersex + (1 + eesex | erid)
   Data: dat2

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 61668.9  61726.5 -30826.4  61652.9     9992

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6647 -0.6348 -0.0018  0.6427  3.3811

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 erid     (Intercept) 20.163   4.490
          eesex        1.086   1.042    0.08
 Residual             21.765   4.665
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.321033   0.217765 345.883   sig
eesex        0.123560   0.098956   1.249   no sig
I(iq - 100)  0.029563   0.003304   8.948   sig
ersex        0.445192   0.302694   1.471   no sig
```

โมเดลที่ไม่มีเพศผู้สัมภาษณ์มีค่าเท่ากับ 20.12 แต่พอใส่เพศผู้สัมภาษณ์ค่าเพิ่มมาเป็น 20.16 ตามหลักควรเป็นไปไม่ได้ เพราะตัวแปรที่เพิ่มจะมาอธิบายความแปรปรวน ทำให้ความแปรปรวนลดลง แต่ด้วยการประมาณค่าที่ซับซ้อนของการวิเคราะห์พหุระดับ ทำให้เกิดความคาดเคลื่อนของตัวเลขบ้าง และเพศผู้สัมภาษณ์ไม่สามารถอธิบายได้อย่างมีนัยสำคัญ ผลแบบนี้จึงโอเคอยู่ และบอกว่าเพศผู้สัมภาษณ์ไม่มีผลต่อตัวแปรตามแล้วนำตัวแปรต้นตัวนี้ออก

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.16$$
$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 1.09$$
$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 21.77$$
$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .08$$

$$\beta_{0j} = 75.32 + 0.45W_{1j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 75.32 + 0.45W_{1j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.12 + u_{1j}; \beta_{2j} = 0.03$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \beta_{2j}(X_{2ij} - 100) + e_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 20.16$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 1.09$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 21.77$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .08$$

คะแนนที่ผู้สัมภาษณ์ประเมินผู้สมัครเพศชาย ที่มีระดับ IQ เท่ากับ 100 ด้วยผู้สัมภาษณ์เพศชาย เท่ากับ 75.54 คะแนน

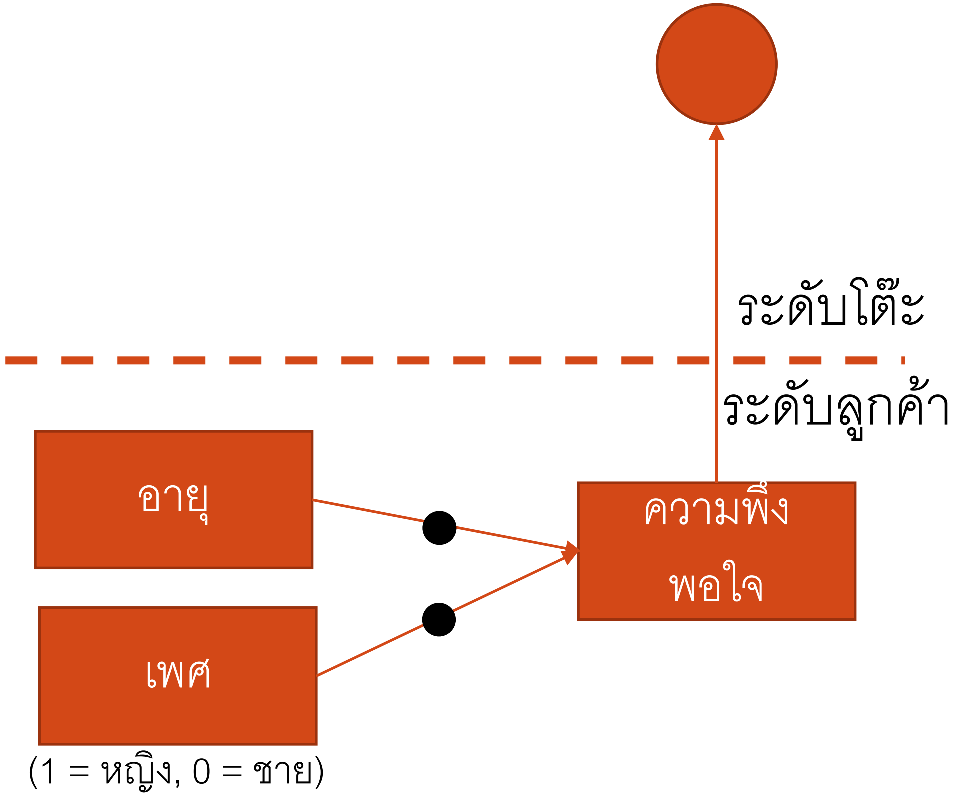
ผู้สมัครเพศหญิงได้รับคะแนนประเมินสูงกว่าเพศชาย 0.12 คะแนนโดยเฉลี่ย เมื่อควบคุม IQ และเพศผู้สัมภาษณ์ให้คงที่ ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

หากผู้สมัครมีคะแนน IQ สูงขึ้น 1 หน่วย จะได้รับคะแนนประเมินสูงขึ้น 0.03 แต้ม เมื่อควบคุมเพศของผู้สมัครและเพศของผู้สัมภาษณ์ให้คงที่

ผู้สัมภาษณ์เพศหญิงให้คะแนนประเมินสูงกว่าผู้สัมภาษณ์เพศชาย 0.45 คะแนน ความแตกต่างนี้ไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

โมเดลความชันแบบสุ่ม

ศึกษาว่าเพศและอายุมีผลต่อความพึงพอใจ
แตกต่างกันระหว่างโต๊ะอาหารหรือไม่



```
> dat3 <-read.table("lecture4ex3.csv", sep=",", header=TRUE)
> out3m0 <- lmer(sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1|tableid), data=dat3,
+                REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> out3m0a <- lmer(sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 + I(age - 40)|tableid), data=dat3,
+                REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> out3m0b <- lmer(sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 + female|tableid), data=dat3,
+                REML=FALSE, control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out3m0, out3m0a)
Data: dat3
Models:
out3m0: sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 | tableid)
out3m0a: sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 + I(age - 40) | tableid)
        Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3m0   5 16553 16582 -8271.5    16543
out3m0a  7 16555 16595 -8270.3    16541 2.3274      2     0.3123
> anova(out3m0, out3m0b)
Data: dat3
Models:
out3m0: sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 | tableid)
out3m0b: sat ~ 1 + I(age - 40) + female + (1 + female | tableid)
        Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3m0   5 16553 16582 -8271.5    16543
out3m0b  7 16554 16594 -8269.9    16540 3.1026      2      0.212
```

ใส่ตัวแปรที่ต้องการให้ความชันแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

อิทธิพลของอายุที่มีผลต่อความพึงพอใจ ไม่แตกต่างกันระหว่างโต๊ะ อย่างมีนัยสำคัญ

ความแตกต่างระหว่างเพศในการประเมินความพึงพอใจ ไม่แตกต่างกันระหว่างโต๊ะ อย่างมีนัยสำคัญ

โมเดลความชันแบบสุ่ม

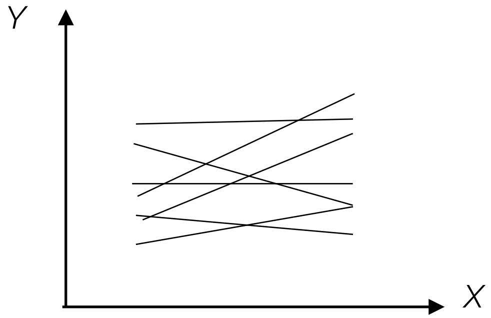
- ตัวแปรสุ่มในระดับกลุ่ม สามารถทำได้ 3 รูปแบบ

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

เป็นปกติ มีจุดตัดและความชัน
แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

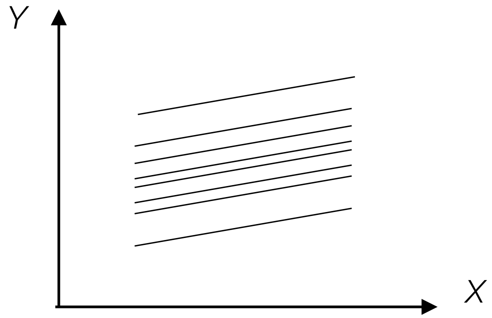


$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

เป็นปกติ จุดตัดแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
แต่ความชันเหมือนกันทุกกลุ่ม

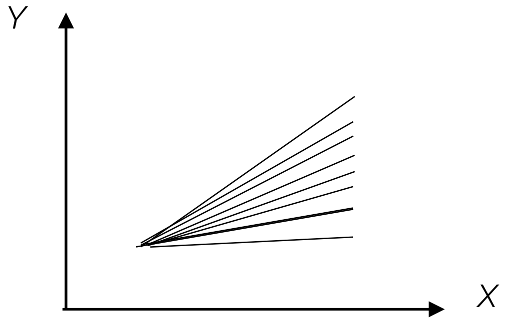


$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

มีเฉพาะโมเดลระยะยาวหรือการทดลอง
ที่จุดเริ่มต้นเท่ากัน



การประมาณค่าพารามิเตอร์

- ในโมเดลพหุระดับ การประมาณค่ามี 2 วิธี คือ ความเป็นไปได้สูงสุด (Maximum Likelihood; ML) และความเป็นไปได้สูงสุดจากค่าคงเหลือ (Residual Maximum Likelihood; REML)
- วิธีการทั้งสองนี้ แตกต่างกันที่การประมาณค่าความแปรปรวนของค่าคงเหลือในโมเดล (เช่น $\tau_{00}, \tau_{11}, \tau_{01}, \sigma^2$)
    - ML จะคำนวณความแปรปรวน โดยหารด้วยจำนวนกลุ่มตัวอย่างตรงๆ เลย แต่ REML จะคำนวณความแปรปวน โดยหารด้วยองศาอิสระ (Degree of freedom) ซึ่งเอาจำนวนกลุ่มตัวอย่าง ลบด้วยจำนวนค่าสัมประสิทธ์ถดถอยที่ประมาณค่าไปแล้ว
    - REML จะทำนายค่าความแปรปรวนแม่นยำกว่า ส่วน ML จะทำนายต่ำกว่าความเป็นจริง

การประมาณค่าพารามิเตอร์

- เมื่อจำนวนกลุ่มมากขึ้น และจำนวนตัวแปรอิสระระดับที่ 2 มีจำนวนน้อย อคติมีแนวโน้มจะน้อยลง
- อย่างไรก็ตาม REML มีข้อจำกัดในการทดสอบสัดส่วนความเป็นไปได้ (Likelihood Ratio Test; LRT) หรือที่เรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการทดสอบความเบี่ยงเบน (Deviance Test) กล่าวคือ
  - ไม่สามารถใช้ LRT ทดสอบอิทธิพลถาวร (Fixed Effects) ได้ ซึ่งอิทธิพลถาวร คือ ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยต่างๆ (γ) หมายความว่า ทดสอบผลของการเพิ่มตัวแปรในสมการไม่ได้ เช่น ทดสอบว่าการเพิ่มเขตการศึกษา ซึ่งแบ่งเป็น 5 เขต สามารถอธิบายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนได้เพิ่มเติมหรือไม่ไม่ได้
  - ใช้ LRT ทดสอบอิทธิพลสุ่ม (Random Effects) ซึ่งคือ ค่าความแปรปรวน (Variance) และความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของค่าความผิดพลาดในการทำนายได้ เมื่ออิทธิพลถาวรของทั้งสองโมเดลเหมือนกันเท่านั้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์

- โดยปกติผมมักใช้ ML เนื่องจากส่วนตัวมองว่า
  - ในการวิเคราะห์พหุระดับ จำนวนกลุ่มต้องสูงระดับหนึ่งอยู่แล้ว มิเช่นนั้นกำลังในการวิเคราะห์ทางสถิติจะน้อยมาก
  - การวิเคราะห์พหุระดับแทบทุกครั้ง จะต้องใช้ LRT ในการเปรียบเทียบโมเดลหลากหลายรูปแบบ ซึ่งทำให้ต้องใช้ ML อยู่ดี หากตอนแรกวิเคราะห์ด้วย REML แล้วสุดท้ายมาวิเคราะห์ด้วย ML ตัวเลขที่ออกมาจะไม่สอดคล้องกัน
- ใน `lme4` สามารถเลือกวิธีการวิเคราะห์ได้โดยแก้ไขตัวเลือกที่ชื่อ REML

```
> out3m0 <- lmer(sat ~ 1 + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
```

คาบต่อไป

- ปฏิสัมพันธ์ (Interaction)
- การบ้านที่ 4

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50) \qquad \rho = -.4$$

L2: $$\beta_{0j} = 40 + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 25)$

L2: $\beta_{0j} = 40 + 0.005W_{1j} + 1.2W_{2j} + u_{0j}$

$\beta_{1j} = 1.15 + u_{1j}$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 & \\ -0.25 & 0.4 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = ผลการปฏิบัติงาน
- X_{ij} = ประสบการณ์ทำงาน (ปี)
- W_{1j} = ขนาดของบริษัท (คน)
- W_{2j} = ค่าเฉลี่ยของเงินที่เพิ่มขึ้น (หน่วยเท่ากับหมื่นบาท)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 36)$

L2:
$$\beta_{0j} = 45 - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = 10 + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & \\ 2.5 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)