การย้ายศูนย์กลาง (Centering)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- รูปแบบการย้ายศูนย์กลาง
- ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1
- ใส่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรเพิ่มในระดับที่ 2
- ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน
- ตัวอย่างที่ 1 ผลของอิทธิพลกบในหนองน้ำ
- ตัวอย่างที่ 2 ผลที่แตกต่างกันของการย้ายศูนย์กลาง
- ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มหรือไม่

รูปแบบการย้ายศูนย์กลาง

- การย้ายศูนย์กลาง คือ การลบตัวแปรอิสระด้วยค่าใดค่าหนึ่ง เพื่อเปลี่ยนผลในการแปลความหมาย
- การย้ายศูนย์กลางมีวิธีการที่เป็นไปได้ดังนี้

วิธีย้ายศูนย์กลาง	ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม
ย้ายไปที่ค่าคงที่	$X_{ij} - c$	$W_j - c$
ย้ายไปที่ค่าเฉลี่ยรวม (Grand Mean Centering)	$X_{ij} - \bar{X}_{..}$	$W_{.j} - \bar{W}_{..}$
ย้ายไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม (Group Mean Centering)	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	ไม่สามารถทำได้ เพราะค่า $W_{.j}$ คงที่ภายในกลุ่ม

การย้ายศูนย์กลางในตัวแปรระดับบุคคล

ค่าเฉลี่ยรวม ของ SES = 47.5

Level 1 ID   Level 2 ID

นักเรียน	โรงเรียน	คะแนนคณิตศาสตร์	SES	ค่าเฉลี่ยกลุ่มของ SES	SES ลบด้วยค่าคงที่ 50	Group Mean Centering	Grand Mean Centering
1	1	70	80	85	30	-5	32.5
2	1	80	85	85	35	0	37.5
3	1	90	90	85	40	5	42.5
4	2	60	50	55	0	-5	2.5
5	2	70	60	55	10	5	12.5
6	2	80	55	55	5	0	7.5
7	3	50	30	35	-20	-5	-17.5
8	3	60	40	35	-10	5	-7.5
9	3	70	35	35	-15	0	-12.5
10	4	40	10	15	-40	-5	-37.5
11	4	50	15	15	-35	0	-32.5
12	4	60	20	15	-30	5	-27.5

การย้ายศูนย์กลางในตัวแปรระดับกลุ่ม

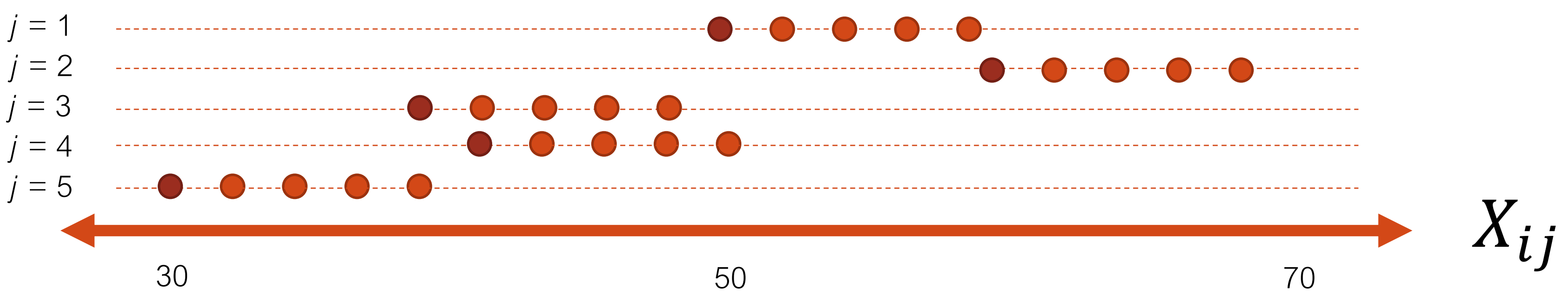
ค่าเฉลี่ยรวมของ
ขนาดโรงเรียน = 1075

Level 1 ID   Level 2 ID

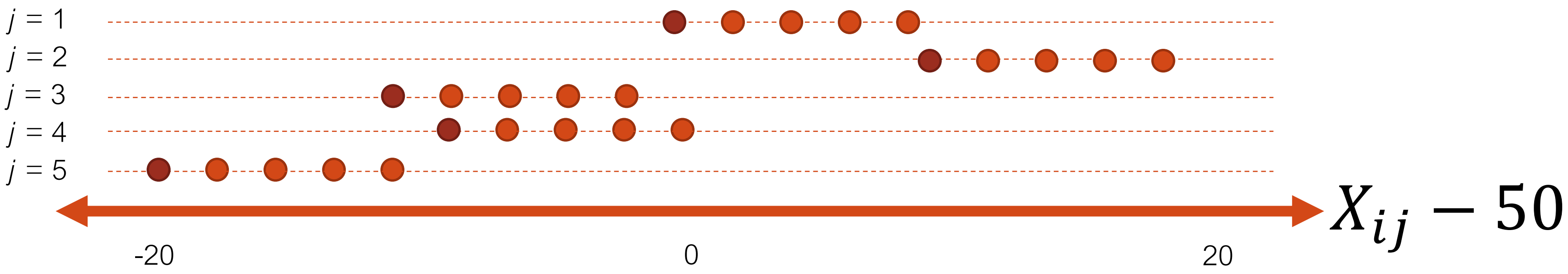
นักเรียน	โรงเรียน	คะแนน คณิตศาสตร์	SES	ขนาด โรงเรียน	ขนาดโรงเรียนลบ ด้วย 500	Grand Mean Centering
1	1	70	80	3000	2500	1925
2	1	80	85	3000	2500	1925
3	1	90	90	3000	2500	1925
4	2	60	50	700	200	-375
5	2	70	60	700	200	-375
6	2	80	55	700	200	-375
7	3	50	30	350	-150	-725
8	3	60	40	350	-150	-725
9	3	70	35	350	-150	-725
10	4	40	10	250	-250	-825
11	4	50	15	250	-250	-825
12	4	60	20	250	-250	-825

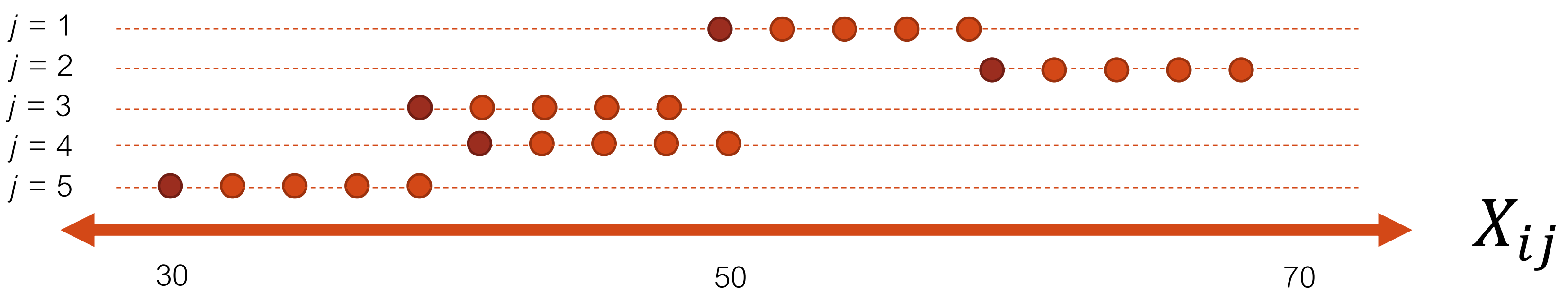
รูปแบบการย้ายศูนย์กลาง

- สังเกตว่า การย้ายศูนย์กลางโดยปกติ จะเอาตัวแปรอิสระไปลบด้วยค่าคงที่ค่าเดียวกัน (รวมถึงลบด้วยค่าเฉลี่ยรวม) การแปลความหมายจึงเหมือนกับการย้ายศูนย์กลางในการวิเคราะห์ถดถอยปกติ ดังที่กล่าวถึงในบทที่ผ่านๆ มา
- กรณีพิเศษในการวิเคราะห์พหุระดับ คือ การย้ายศูนย์กลางของตัวแปรระดับที่ 1 ไปค่าเฉลี่ยกลุ่ม การย้ายศูนย์กลางรูปแบบนี้ ค่าของตัวแปรในแต่ละกลุ่มจะลบด้วยค่าที่แตกต่างกัน
- การย้ายศูนย์กลางไปค่าเฉลี่ยกลุ่ม (Group Mean Centering) จึงเปลี่ยนแนวทางการแปลความหมายของโมเดลไป กล่าวคือ โมเดลการวิเคราะห์จะไม่ใช่โมเดลเดิม

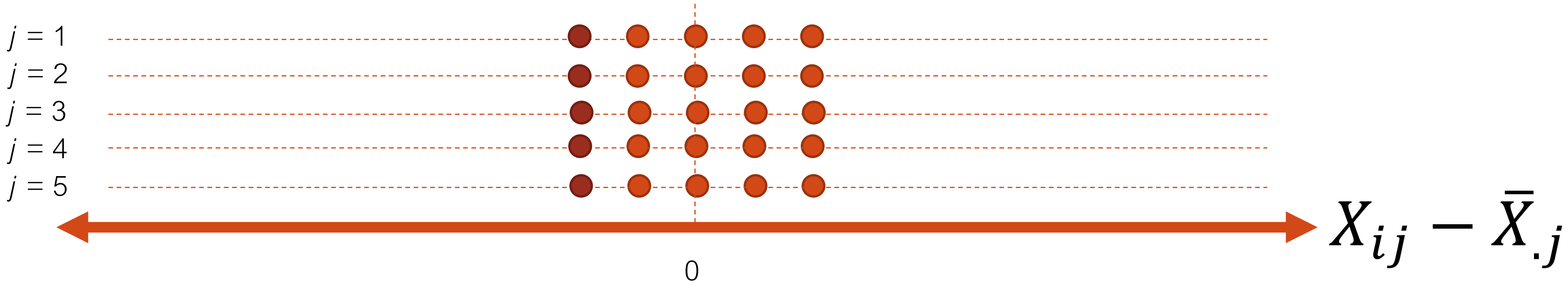


การย้ายศูนย์กลาง เหมือนการเคลื่อนจุดทั้งหมดไปทางซ้ายหรือขวา ตำแหน่งของแต่ละจุดยังคงเดิม ไม่เปลี่ยนแปลง





เปลี่ยนค่าของตัวแปรอย่างสิ้นเชิง
แทนที่จะเป็นการเลื่อนแกนไปทางซ้ายหรือขวา
เหมือนการย้ายศูนย์กลางปกติ



ดังนั้นค่าของ $X_{ij} - \bar{X}_{.j}$ จึงเป็นตัวแทนของตำแหน่งภายในกลุ่ม ใช้ในการทดสอบอิทธิพลกบในหนองน้ำ (Frog Pond Effect) ว่าค่าของตัวแปร *X* เทียบกับคนในกลุ่ม (ว่ามากหรือน้อยเมื่อเทียบกับคนอื่นในกลุ่มเดียวกัน) มีผลอย่างไรต่อตัวแปรตาม

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

- ตัวแปรอิสระระดับที่ 1 ถูกลบด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

ระดับที่ 2

- เมื่อเปลี่ยนจาก X_{ij} เป็น $X_{ij} - \bar{X}_{.j}$ จะทำให้ความหมายของตัวแปรอิสระเปลี่ยนจาก ค่าของตัวแปรอิสระที่สังเกตได้ กลายเป็นค่าเบี่ยงเบนของค่าตัวแปรอิสระภายในกลุ่ม
    - ตำแหน่งของตัวแปรอิสระภายในกลุ่ม ว่าน้อยหรือมากเทียบกับคนอื่นภายในกลุ่ม

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

- เปรียบเทียบระหว่างโมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบสุ่ม (RANCOVA) โดยมี X และ $X - \bar{X}$ เป็นตัวแปรอิสระในระดับที่ 1

	No Centering		Group Mean Centering
ระดับที่ 1	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$	ระดับที่ 1	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$
ระดับที่ 2	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$	ระดับที่ 2	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$
รวม	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + u_{0j} + e_{ij}$	รวม	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + e_{ij}$

เอาทั้งสองข้างของทั้งสองสมการ มาหาค่าเฉลี่ยกลุ่ม เพื่อหาอิทธิพลระดับกลุ่ม

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_j} Y_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n_j}(\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + u_{0j} + e_{ij})}{n_j}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_j} Y_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n_j}(\gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + e_{ij})}{n_j}$$

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

- เปรียบเทียบระหว่างโมเดลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมแบบสุ่ม (RANCOVA) โดยมี X และ $X - \bar{X}$ เป็นตัวแปรอิสระในระดับที่ 1

No Centering		Group Mean Centering
$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$	ระดับที่ 1	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$
$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$	ระดับที่ 2	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$
$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + u_{0j} + e_{ij}$	รวม	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + e_{ij}$
$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$	อิทธิพลระหว่างกลุ่ม	$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + u_{0j}$
$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$	อิทธิพลภายในกลุ่ม	$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$

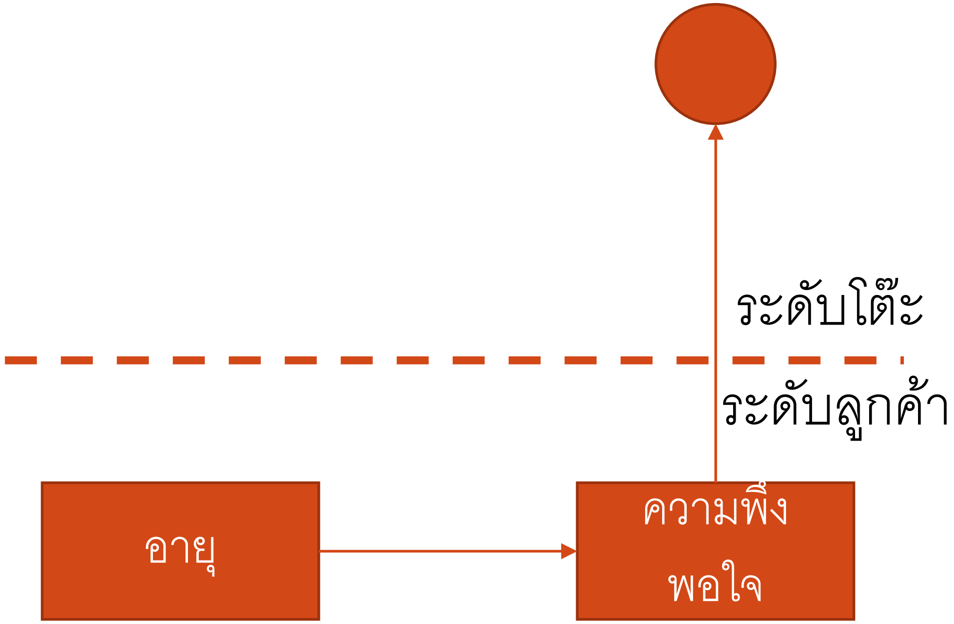
ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

	ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij} - \bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
A1	X_{ij}	-	γ_{10}	γ_{10}
B1	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	-	γ_{10}	-

- จะเห็นว่าโมเดล A1 จะเป็นโมเดลที่สร้างข้อจำกัดขึ้นมาว่าอิทธิพลภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มเท่ากัน
  - หากในความจริง อิทธิพลระหว่างกลุ่มแตกต่างจากอิทธิพลภายในกลุ่ม โมเดลนี้จะเป็นโมเดลที่ระบุผิดพลาด (Misspecification) ทำให้ค่าอิทธิพลที่ประมาณค่าได้ทั้งโมเดล ไม่ตรงความเป็นจริง
- โมเดล B1 เป็นโมเดลที่ไม่สนอิทธิพลระหว่างกลุ่มว่าจะเป็นอย่างไร สนใจเพียงอิทธิพลภายในกลุ่มว่ามีค่าเท่าไร ทำให้การประมาณค่าอิทธิพลภายในกลุ่มถูกต้อง

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

เปรียบเทียบอิทธิพลของอายุ
ที่มีต่อความพึงพอใจ
ด้วยวิธีการย้ายศูนย์กลางแบบต่างๆ



ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

```
> dat3 <-read.table("lecture4ex3.csv", sep=",", header=TRUE)
> dat3$aveage <- ave(dat3$age, dat3$tableid)
> dat3$diffage <- dat3$age - dat3$aveage
```

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม

Group Mean Centering

นำค่าของตัวแปรลบด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่ม เพื่อได้ค่าเบี่ยงเบนภายในกลุ่ม
หรือตัวแปรที่ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มแล้ว

```
> out3m1 <- lmer(sat ~ 1 + age + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
```

ทำนายด้วยตัวแปรที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลาง (No Centering)

```
> out3m2 <- lmer(sat ~ 1 + diffage + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
```

ทำนายด้วยตัวแปรที่ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม (Group Mean Centering)

```
> summary(out3m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod'
Formula: sat ~ 1 + age + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16585.8  16608.6  -8288.9  16577.8     2258

Scaled resi
     Min
-3.05873 -0.59420 -0.00433  0.60538  3.07580

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 68.44    8.273
 Residual             60.82    7.799
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  55.1116     0.6093   90.45
age           0.2553     0.0125   20.42
```

```
> summary(out3m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + diffage + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16561.4  16584.3  -8276.7  16553.4     2258

-3.14691 -0.59933 -0.00696  0.60899  3.07337

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 64.45    8.028
 Residual             60.82    7.798
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 64.28983    0.40129  160.21
diffage      0.26783    0.01276   20.99
```

สังเกตว่า ความเป็นไปได้ (Log Likelihood) ของโมเดลไม่เท่ากัน แสดงว่าทั้งสองโมเดลไม่ใช่โมเดลเดียวกัน

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij}-\bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij}-\bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
X_{ij}	-	0.255**	0.255**
$X_{ij}-\bar{X}_{.j}$	-	0.268**	-

อิทธิพลระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่มถัวเฉลี่ยกัน

อิทธิพลภายในกลุ่มเพียงอย่างเดียว

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

- จากสมการอิทธิพลภายในกลุ่ม เมื่อตัวแปรอิสระถูกย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ย (Group Mean Centering)

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$
$$Y_{ij} = \bar{Y}_{.j} + \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

- เมื่อเทียบกับสมการภายในกลุ่มของโมเดลนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

- เนื่องจาก $\beta_{1j} = \gamma_{10}$ ในโมเดลนี้ แสดงว่า $\beta_{0j} = \bar{Y}_{.j}$ กล่าวคือ เมื่อย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม จะทำให้จุดตัดแกน Y มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

ใส่ตัวแปรย้ายศูนย์กลางในระดับที่ 1

- ถ้ามีตัวแปรสองตัว โดยที่ตัวแปรแรกมีการย้ายศูนย์กลางแบบค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \beta_{2j}X_{2ij} + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามของกลุ่มดังกล่าวที่น่าจะเกิดขึ้นเมื่อ $X_2 = 0$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \beta_{2j}(X_{2ij} - c) + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามของกลุ่มดังกล่าวที่น่าจะเกิดขึ้นเมื่อ $X_2 = c$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \beta_{2j}(X_{2ij} - \bar{X}_{2..}) + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามของกลุ่มดังกล่าวที่น่าจะเกิดขึ้นเมื่อ $X_2 = \bar{X}_{2..}$

ค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้ว (Adjusted Mean) ของกลุ่มที่ *j*

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \beta_{2j}(X_{2ij} - \bar{X}_{2.j}) + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามของกลุ่มดังกล่าว

ค่าเฉลี่ยที่ยังไม่ปรับ (Unadjusted Mean) ของกลุ่มที่ *j*

ใส่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรเพิ่มในระดับที่ 2

- ใส่ค่าเฉลี่ยกลุ่มของตัวแปรอิสระเพิ่มในโมเดล เพื่อทำนาย β_{0j}

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

ระดับที่ 2

- สมการรวมทั้ง 2 ระดับจะเป็นดังนี้

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + e_{ij}$$

ใส่ค่าเฉลี่ยของตัวแปรเพิ่มในระดับที่ 2

- หาอิทธิพลระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + e_{ij}$$

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + e_{ij}\right)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{10}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{1ij}\right) + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(e_{ij}\right)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

- หาอิทธิพลภายในกลุ่ม

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + e_{ij} - \left(\gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}\right)$$

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10}$$

ระดับที่ 2

γ_{00} = ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามเมื่อ $\bar{X}_{1.j} = 0$

γ_{10} = อิทธิพลของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตามภายในกลุ่ม

γ_{01} = อิทธิพลของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตามระหว่างกลุ่ม

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล		ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij} - \bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
A1	X_{ij}	-	γ_{10}	γ_{10}
B1	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	-	γ_{10}	-
A2	X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	$\gamma_{10} + \gamma_{01}$
B2	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	γ_{01}

- โมเดล A2 และ B2 แท้จริงแล้วเป็นโมเดลเดียวกันที่มีการจัดพารามิเตอร์ต่างกัน (Reparameterization) ค่าความเป็นไปได้ของสองโมเดลนี้จะเท่ากัน
    - A2 สามารถทดสอบความแตกต่างระหว่างอิทธิพลภายในและระหว่างกลุ่มได้ $(H_0 \colon \gamma_{01} = 0)$
    - B2 สามารถทดสอบอิทธิพลของตัวแปร ในแต่ละระดับได้
- หากทดสอบโมเดล A2 แล้วพบว่า γ_{01} ไม่ถึงระดับนัยสำคัญแล้ว อาจลดรูปโมเดลให้เป็นโมเดล A1

```
> out3m3 <- lmer(sat ~ 1 + age + aveage + (1|tableid),
+                data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m3)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + age + aveage + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16562.7  16591.3  -8276.4  16552.7     2257

Scaled residuals:
    Min      1Q  Medi
-3.1638 -0.6006 -0.00

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 64.30    8.019
 Residual             60.82    7.799
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 66.10005    2.24652  29.423
age          0.26783    0.01276  20.992
aveage      -0.31818    0.06279  -5.068
```

```
> out3m4 <- lmer(sat ~ 1 + diffage + aveage + (1|tableid),
+                data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m4)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + diffage + aveage + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16562.7  16591.3  -8276.4  16552.7     2257

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 64.30    8.019
 Residual             60.82    7.799
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 66.10005    2.24652  29.423
diffage      0.26783    0.01276  20.992
aveage      -0.05035    0.06148  -0.819
```

สังเกตว่า ค่าความเป็นไปได้เท่ากัน แสดงว่าสองโมเดลนี้เป็นโมเดลเดียวกัน

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij} - \bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
X_{ij}	-	0.255**	0.255**
$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	-	0.268**	-
X_{ij}	$\bar{X}_{.j}$	0.268**	0.268 – 0.318 = -0.050
$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j}$	0.268**	-0.050

```
> out3m4 <- lmer(sat ~ 1 + diffage + aveage + (1|tableid),
+                data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m4)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + diffage + aveage + (1 | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid 
 16562.7  16591.3  -8276.4  16552.7     2257 

Scaled residuals: 
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.1638 -0.6006 -0.0048  0.6144  3.0681 

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 64.30    8.019   
 Residual             60.82    7.799   
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept) 66.10005    2.24652  29.423
diffage      0.26783    0.01276  20.992   sig
aveage      -0.05035    0.06148  -0.819   not sig
```

$$\beta_{0j} = 66.10 - 0.05\bar{X}_{1.j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.27 + u_{1j} \qquad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 64.30$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij} \qquad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 60.82$$

$\beta_{0j} = 39.29 - 0.05\bar{X}_{1.j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 0.27 + u_{1j}$ $\quad \mathrm{Var}(u_{0j}) = 64.30$

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$ $\quad \mathrm{Var}(e_{ij}) = 60.82$

ค่าเฉลี่ยของความพึงพอใจของลูกค้าทุกคนในทุกโต๊ะเท่ากับ 39.29 แต้ม เมื่ออายุเท่ากับ 0 ปี

เปรียบเทียบในโต๊ะเดียวกัน ลูกค้าคนที่มีอายุมากกว่าอีกคนอยู่ 1 ปี ความพึงพอใจของลูกค้าคนดังกล่าวจะมากกว่าอีกคน 0.27 แต้ม

เมื่ออายุเฉลี่ยของลูกค้าในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ปี ความพึงพอใจของลูกค้าในโต๊ะดังกล่าวลดลง 0.05 แต้ม ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

- อิทธิพลภายในกลุ่ม อาจขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระเองระหว่างกลุ่ม ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ตามวิธีการย้ายศูนย์กลาง คือ

ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม		ไม่ย้ายศูนย์กลาง
$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$	ระดับที่ 1	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$
$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$	ระดับที่ 2	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

ตัวแปรระดับที่ 1 ถูกย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- สมการรวมทั้ง 2 ระดับจะเป็นดังนี้

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + u_{0j} + u_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^{2} + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} - u_{1j}\bar{X}_{1.j} + e_{ij}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

- หาอิทธิพลของตัวแปรอิสระระหว่างกลุ่ม

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} - u_{1j}\bar{X}_{1.j} + e_{ij}$$

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\begin{pmatrix}\gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} \\ -\gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j} + u_{1j}X_{1ij} - u_{1j}\bar{X}_{1.j} + e_{ij}\end{pmatrix}$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} - \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 - \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{1.j} - u_{1j}\bar{X}_{1.j} + e_{ij}$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

- หาอิทธิพลของตัวแปรอิสระภายในกลุ่ม

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + u_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

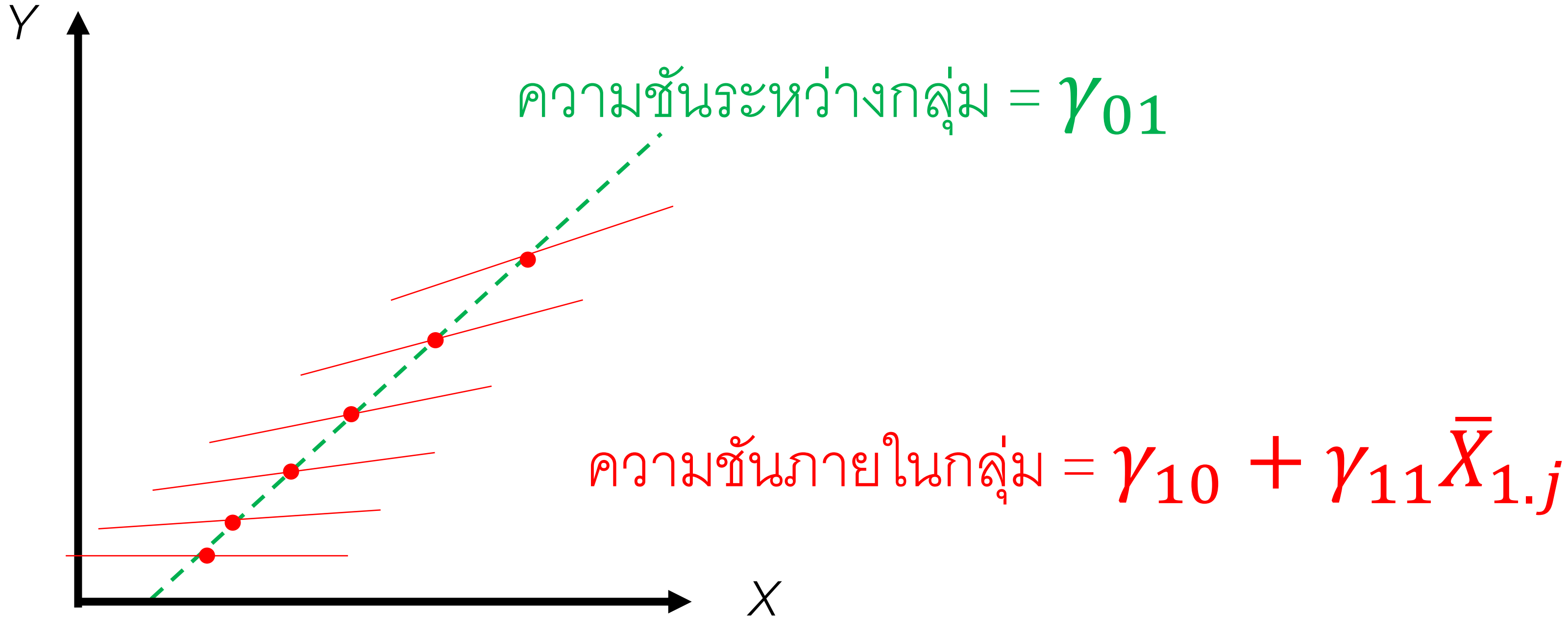
$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \left(\gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}\right)\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2



$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$ ระดับที่ 2

γ_{00} = ค่าเฉลี่ยกลุ่มของตัวแปรตาม เมื่อกลุ่มดังกล่าวมี $\bar{X}_{1.j}$ เท่ากับ 0

γ_{10} = อิทธิพลของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตามภายในกลุ่ม เมื่อกลุ่มดังกล่าวมี $\bar{X}_{1.j}$ เท่ากับ 0

γ_{01} = อิทธิพลของตัวแปรอิสระที่มีต่อตัวแปรตามระหว่างกลุ่ม กล่าวคือ ถ้าค่าเฉลี่ยของ X_1 เพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามเพิ่มขึ้น γ_{01} หน่วย

γ_{11} = อิทธิพลภายในกลุ่มของตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อค่าเฉลี่ยตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น 1 หน่วย

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

ตัวแปรระดับที่ 1 ถูกย้ายศูนย์กลางด้วยค่าคงที่ หรือไม่ย้ายศูนย์กลางเลย

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- สมการรวมทั้ง 2 ระดับจะเป็นดังนี้

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

- หากนำสมการรวมมาหาค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}$$

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} + u_{0j} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}\right)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{1ij}\right) + \gamma_{11}\bar{X}_{1ij}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{1ij}\right)$$
$$+u_{0j} + u_{1j}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{1ij}\right) + \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(e_{ij}\right)$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{10}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{1.j}$$

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \left(\gamma_{01} + \gamma_{10} + u_{1j}\right)\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

- จากสมการนี้จะเห็นว่า อิทธิพลระหว่างกลุ่มจาก X ไป Y เป็นสมการเชิงเส้นโค้ง

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + (\gamma_{01} + \gamma_{10} + u_{1j})\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^{2} + u_{0j}$$

- หาอิทธิพลของ X ไป Y ภายในกลุ่ม

$$Y_{ij} = \cancel{\gamma_{00}} + \cancel{\gamma_{01}\bar{X}_{1.j}} + \gamma_{10}X_{1ij} + \gamma_{11}X_{1ij}\bar{X}_{1.j} + \cancel{u_{0j}} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}$$

$$\bar{Y}_{.j} = \cancel{\gamma_{00}} + (\cancel{\gamma_{01}} + \gamma_{10} + u_{1j})\bar{X}_{1.j} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}^{2} + \cancel{u_{0j}} \quad -$$

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

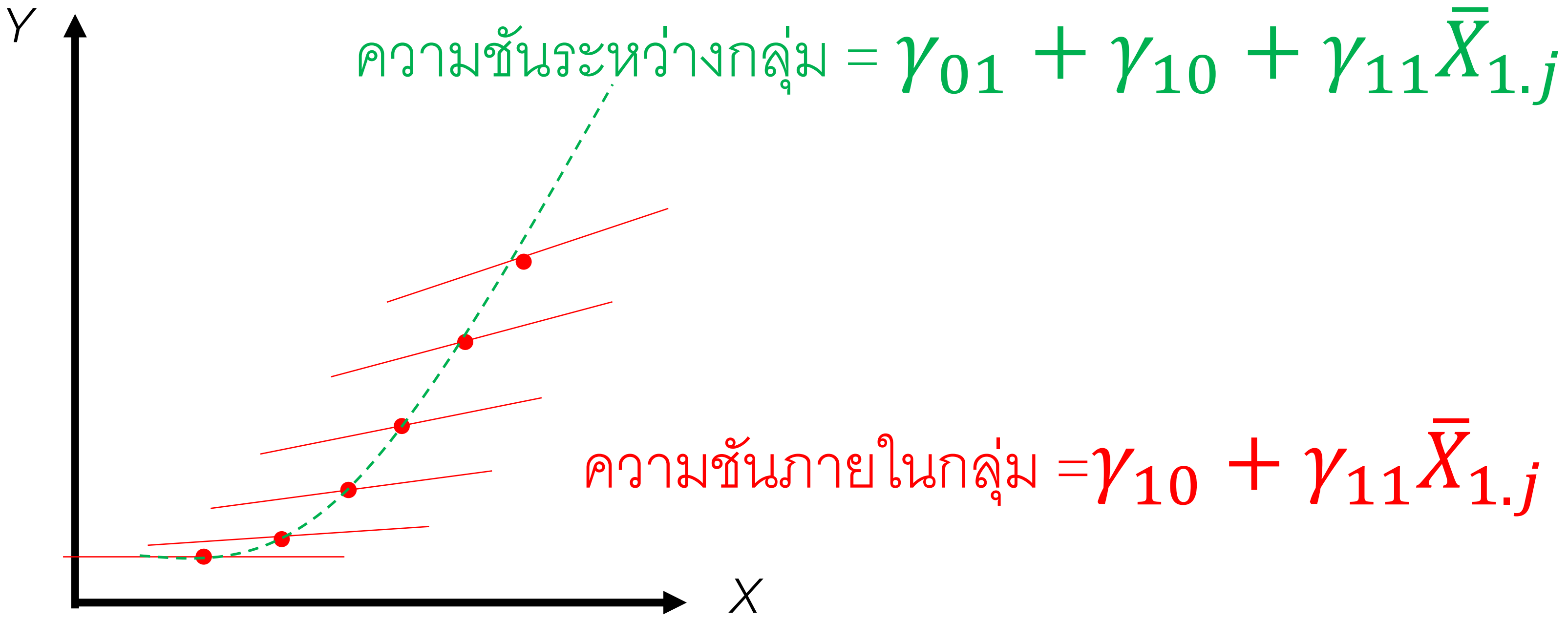
$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = (\gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j})(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$ ระดับที่ 2

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$



ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับโดยตัวแปรเดียวกัน

ระดับของอิทธิพล	ขนาดอิทธิพลเฉลี่ย
ระหว่างกลุ่ม	$(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j})\bar{X}_{1.j}$
ภายในกลุ่ม	$(\gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j})(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j})$

- อิทธิพลภายในกลุ่มขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระระหว่างกลุ่ม
- ในโมเดลอิทธิพลระหว่างกลุ่ม
  - ไม่มีปฏิสัมพันธ์ : $\gamma_{01} + \gamma_{10}$
  - มีปฏิสัมพันธ์ : $\gamma_{01} + \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}$
- ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง ขึ้นอยู่กับค่า γ_{11}
  - ถ้าเป็นบวก อิทธิพลสูงขึ้นเมื่อค่าเฉลี่ยตัวแปรอิสระสูงขึ้น
  - ถ้าเป็นลบ อิทธิพลลดลง เมื่อค่าเฉลี่ยตัวแปรอิสระสูงขึ้น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$ ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$ ระดับที่ 2

γ_{00} = ค่าของตัวแปรตาม เมื่อกลุ่มดังกล่าวมี $\bar{X}_{1.j}$ เท่ากับ 0 และบุคคลมีค่า X_1 เท่ากับ 0

γ_{10} = อิทธิพลภายในกลุ่มของ X_1 ที่มีต่อตัวแปรตาม เมื่อกลุ่มดังกล่าวมีค่า $\bar{X}_{1.j}$ เท่ากับ 0

γ_{01} = เมื่อค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น 1 หน่วยแล้ว ค่าของตัวแปรตามเมื่อ $X_1 = 0$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น γ_{01} หน่วย

γ_{11} = อิทธิพล<u>ภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม</u>ของตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อค่าเฉลี่ยตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น 1 หน่วย

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล		ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij} - \bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
A1	X_{ij}	-	γ_{10}	γ_{10}
B1	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	-	γ_{10}	-
A2	X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	$\gamma_{10} + \gamma_{01}$
B2	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	γ_{01}
A3	X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}, \beta_{1j}$	$\gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{.j} + u_{1j}$	$\gamma_{01} + \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{.j}$
B3	$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}, \beta_{1j}$	$\gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{.j} + u_{1j}$	γ_{01}

- โมเดล A3 และ B3 ถือว่าเป็นคนละโมเดลกัน B3 มีอิทธิพลระหว่างกลุ่มเป็นเส้นตรง แต่ A3 มีอิทธิพลระหว่างกลุ่มเป็นเส้นโค้ง เพราะ γ_{11} ส่งผลทั้งอิทธิพลภายนอกกลุ่มและภายในกลุ่ม
  - ดังนั้น หากผู้วิจัยคิดว่าอิทธิพลภายในกลุ่มถูกกำกับด้วย $\bar{X}_{.j}$ ควรใช้โมเดล B3 เนื่องจากอิทธิพลระหว่างกลุ่มเป็นเส้นตรง ซึ่งแปลความหมายได้ง่ายกว่ามาก
  - หากคาดว่าจะเกิดความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มเป็นเส้นโค้ง ให้ใช้โมเดล B3 แต่ใส่ $\bar{X}_{.j}^2$ ลงในสมการทำนาย β_{0j} แทนที่จะใช้โมเดล A3 และไม่ได้ตั้งข้อจำกัดว่า $\bar{X}_{.j}$ กำกับอิทธิพลภายในและระหว่างกลุ่มด้วยขนาด γ_{11} เท่ากัน

ลำดับวิธีการเขียนคำสั่งโปรแกรม สำหรับโมเดลทั้ง 6 โมเดล

เอาอายุหาร 10 เพื่อให้โมเดลประมาณค่าได้

```
dat3$sage <- dat3$age / 10
dat3$avesage <- ave(dat3$sage, dat3$tableid)
dat3$diffsage <- dat3$sage - dat3$avesage

out3m1 <- lmer(sat ~ 1 + sage + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m1)
```

A1: No centering; L1 Only

```
out3m2 <- lmer(sat ~ 1 + diffsage + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m2)
```

B1: Group centering; L1 Only

```
out3m3 <- lmer(sat ~ 1 + sage + avesage + (1|tableid),
               data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m3)
```

A2: No centering; L1 and L2

```
out3m4 <- lmer(sat ~ 1 + diffsage + avesage + (1|tableid),
               data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m4)
```

B2: Group centering; L1 and L2

```
out3m5 <- lmer(sat ~ 1 + sage + avesage + sage:avesage + (1 + sage|tableid),
               data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m5)
```

A3: No centering; L1, L2, and random slope

```
out3m6 <- lmer(sat ~ 1 + diffsage + avesage + diffsage:avesage + (1 + diffsage|tableid),
               data=dat3, REML=FALSE)
summary(out3m6)
```

B3: Group centering; L1, L2, and random slope

```
> out3m5 <- lmer(sat ~ 1 + sage + avesage + sage:avesage
+                + (1 + sage|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m5)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + sage + avesage + sage:avesage + (1 + sage | tabl
   Data: dat3

     AIC       BIC   logLik deviance df.resid
 16566.8   16612.6  -8275.4  16550.8     2254

Scaled residuals:
    Min      1Q   Med
-3.1645 -0.5896 -0.0

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 tableid  (Intercept) 68.4290  8.2722
          sage         0.4891  0.6994   -0.26
 Residual             59.8437  7.7359
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept)   63.6714     3.7641  16.915
sage           3.3543     0.8770   3.825
avesage       -2.4887     1.0657  -2.335
sage:avesage  -0.1867     0.2393  -0.781
```

```
> out3m6 <- lmer(sat ~ 1 + diffsage + avesage + diffsage:avesage
+                + (1 + diffsage|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m6)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + diffsage + avesage + diffsage:avesage + (1 + dif
   Data: dat3

     AIC       BIC   logLik deviance df.resid
 16568.2   16614.0  -8276.1  16552.2     2254

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 tableid  (Intercept) 64.4449  8.0278
          diffsage     0.2536  0.5036   -0.11
 Residual             60.2845  7.7643
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                 Estimate Std. Error t value
(Intercept)      66.09848    2.24635  29.425
diffsage          2.81671    0.91338   3.084
avesage          -0.50294    0.61473  -0.818
diffsage:avesage -0.03791    0.24956  -0.152
```

สังเกตว่า ความเป็นไปได้ของโมเดลไม่เท่ากัน แสดงว่าทั้งสองโมเดลไม่ใช่โมเดลเดียวกัน

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij}-\bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij}-\bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
X_{ij}	-	2.553**	2.553**
$X_{ij}-\bar{X}_{.j}$	-	2.678**	-
X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	2.678**	-0.504
$X_{ij}-\bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	2.678**	-0.504
X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j},\beta_{1j}$	$3.354^{**}-0.187\bar{X}_{.j}$	$3.354-2.489-0.187\bar{X}_{.j}=0.865-0.187\bar{X}_{.j}$
$X_{ij}-\bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j},\beta_{1j}$	$2.817^{**}-0.038\bar{X}_{.j}$	-0.503

```
> out3m6 <- lmer(sat ~ 1 + diffsage + avesage + diffsage:avesage
+              + (1 + diffsage|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> summary(out3m6)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + diffsage + avesage + diffsage:avesage + (1 + di
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16568.2  16614.0  -8276.1  16552.2     2254

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1662 -0.6010 -0.0038  0.6128  3.0589

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 tableid  (Intercept) 64.4449  8.0278
          diffsage     0.2536  0.5036   -0.11
 Residual             60.2845  7.7643
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                 Estimate Std. Error t value
(Intercept)      66.09848    2.24635  29.425
diffsage          2.81671    0.91338   3.084   sig
avesage          -0.50294    0.61473  -0.818   Not sig
diffsage:avesage -0.03791    0.24956  -0.152   Not sig
```

ตัวอย่างแปลความหมายเฉพาะโมเดล 6 (B3) เท่านั้น

ไม่แปลความหมายโมเดล 5 (A3)

$$\beta_{0j} = 66.10 - 0.50\bar{X}_{1.j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 2.82 - 0.04\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = -.11$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 64.44$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 0.25$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 60.28$$

$$\beta_{0j} = 66.10 - 0.50\bar{X}_{1.j} + u_{0j}; \beta_{1j} = 2.82 - 0.04\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = -.11$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 64.44$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.25$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 60.28$$

ค่าเฉลี่ยของความพึงพอใจของโต๊ะที่ลูกค้าอายุเฉลี่ยเท่ากับ 0 ปีเท่ากับ 66.10 แต้ม

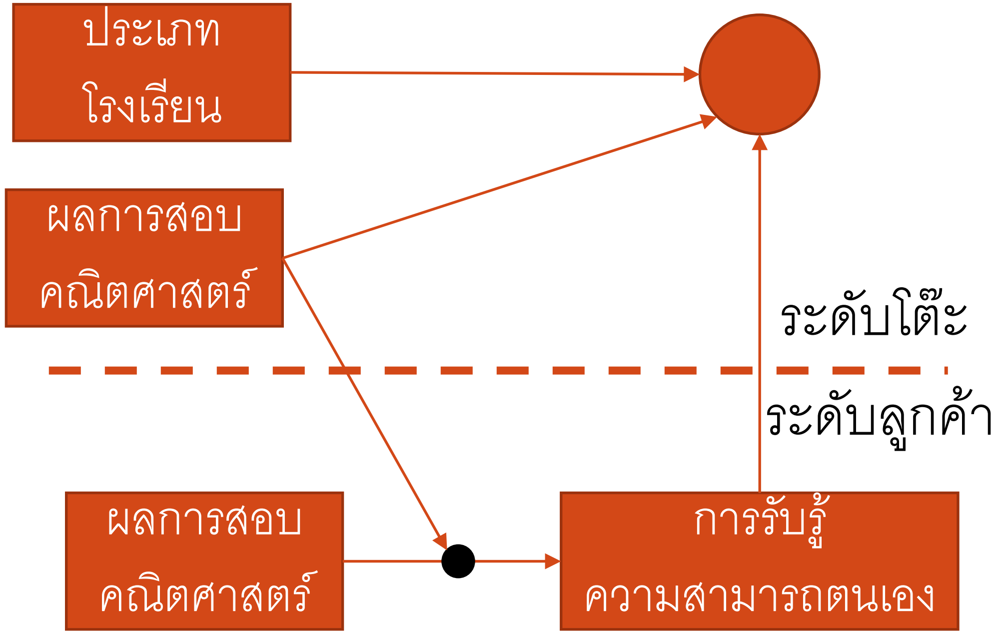
เมื่ออายุของลูกค้าในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ปี ในโต๊ะที่ลูกค้าอายุเฉลี่ยเท่ากับ 0 ปี ความพึงพอใจจะเพิ่มขึ้น 2.82 แต้ม

เมื่ออายุเฉลี่ยของลูกค้าโต๊ะหนึ่งเพิ่มขึ้น 1 ปี ความพึงพอใจเฉลี่ยของโต๊ะลดลง 0.50 แต้ม ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

เมื่ออายุเฉลี่ยของลูกค้าในโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ปี อิทธิพลของอายุของลูกค้าในโต๊ะลดลง 0.04 แต้มต่อปี ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

ตัวอย่างที่ 1 ผลของอิทธิพลกบในหนองน้ำ

ทำนายการรับรู้ความสามารถของตนเอง
ของนักเรียน ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์
และประเภทของโรงเรียน



```
> dat4 <-read.table("lecture6ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> dat4$aveach <- ave(dat4$ach, dat4$schoolid)
> dat4$diffach <- dat4$ach - dat4$aveach
> out4m1 <- lmer(efficacy ~ 1 + diffach*I(aveach - 50) + private
+                + (1 + diffach|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + diffach * I(aveach - 50) + private + (1 +
   Data: dat4

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  8888.7   8939.0  -4435.3   8870.7     1982

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1594 -0.6500  0.0071  0.6654  3.2921

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 schoolid (Intercept) 1.53574  1.2392
          diffach     0.02968  0.1723   -0.22
 Residual             4.34903  2.0854
Number of obs: 1991, groups:  schoolid, 50

Fixed effects:
                        Estimate Std. Error t value
(Intercept)            35.602009   0.325448 109.394
diffach                 0.061923   0.027110   2.284   sig
I(aveach - 50)          0.048671   0.021855   2.227   sig
private                -0.181827   0.420004  -0.433   Not sig
diffach:I(aveach - 50)  0.009505   0.002548   3.730   sig
```

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 35.60 + 0.05(\bar{X}_{1.j} - 50) - 0.18W_1 + u_{0j};$$

$$\beta_{1j} = 0.06 + 0.01(\bar{X}_{1.j} - 50) + u_{1j}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = -.22$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 1.54$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.03$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 4.35$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$
$$\beta_{0j} = 35.60 + 0.05(\bar{X}_{1.j} - 50) - 0.18W_1 + u_{0j};$$
$$\beta_{1j} = 0.06 + 0.01(\bar{X}_{1.j} - 50) + u_{1j}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = -.22$$
$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 1.54$$
$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.03$$
$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 4.35$$

$$Y_{ij} = 35.60 + 0.05(\bar{X}_{1.j} - 50) - 0.18W_1 + 0.06(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j})$$
$$+0.01(\bar{X}_{1.j} - 50)(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยการรับรู้ความสามารถตนเองเท่ากับ 35.60 เมื่อเป็นโรงเรียนรัฐบาลที่ผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 50 แต้ม

ภายในโรงเรียนที่ผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 50 แต้ม นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์เพิ่มขึ้น 1 แต้ม จะมีคะแนนการรับรู้ความสามารถตนเองเพิ่มขึ้น 0.06 แต้ม

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$
$$\beta_{0j} = 35.60 + 0.05(\bar{X}_{1.j} - 50) - 0.18W_1 + u_{0j};$$
$$\beta_{1j} = 0.06 + 0.01(\bar{X}_{1.j} - 50) + u_{1j}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = -.22$$
$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 1.54$$
$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 0.03$$
$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 4.35$$

$$Y_{ij} = 35.60 + 0.05(\bar{X}_{1.j} - 50) - 0.18W_1 + 0.06(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j})$$
$$+0.01(\bar{X}_{1.j} - 50)(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

เมื่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยของโรงเรียนเพิ่มขึ้น 1 แต้ม ควบคุมประเภทของโรงเรียน คะแนนเฉลี่ยการรับรู้ความสามารถของตนเองเพิ่มขึ้น 0.05 แต้ม

โรงเรียนเอกชนมีค่าเฉลี่ยการรับรู้ความสามารถของตนเองต่ำกว่าโรงเรียนรัฐบาล 0.18 แต้ม เมื่อควบคุมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยของโรงเรียน แต่ผลไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

อิทธิพลภายในโรงเรียนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีต่อการรับรู้ความสามารถของตนเอง เมื่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 1 แต้ม อิทธิพลดังกล่าวเพิ่มขึ้น 0.01 แต้ม

เพื่อตรวจสอบปฏิสัมพันธ์ระหว่างอิทธิพลระหว่างกลุ่มและอิทธิพลภายในกลุ่ม
จึงหาค่าของค่าเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ และค่าเบี่ยงเบนภายในโรงเรียนของผลสัมฤทธิ์ที่เหมาะสม

Null Model ของผลสัมฤทธิ์

```
> out4m0 <- lmer(ach ~ 1 + (1|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m0)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: ach ~ 1 + (1 | schoolid)
   Data: dat4

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 14905.9  14922.7  -7449.9  14899.9     1988

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.4893 -0.6918  0.0152  0.6705  3.2198

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 schoolid (Intercept) 92.87    9.637
 Residual             94.97    9.745
Number of obs: 1991, groups:  schoolid, 50

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)   54.215      1.381   39.26
```

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่างกลุ่มเท่ากับ 9.6 ปัดเป็น 10

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานภายในกลุ่มเท่ากับ 9.7 ปัดเป็น 10

ค่าเฉลี่ยรวมเท่ากับ 54.21 ปัดเป็น 55

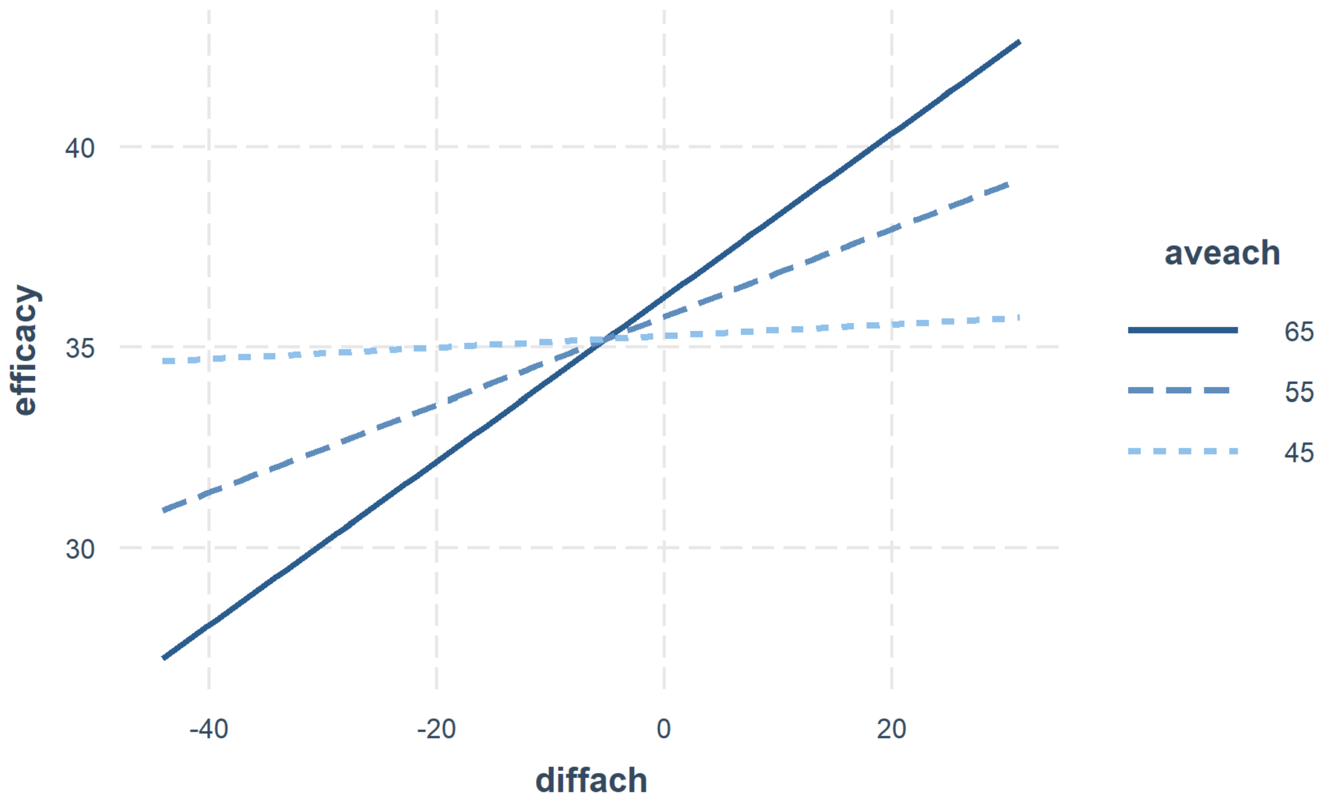
ค่าเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ที่เหมาะสม คือ 55 – 10, 55, 55 + 10 = 45, 55, 65

ค่าเบี่ยงเบนภายในโรงเรียนของผลสัมฤทธิ์ที่เหมาะสม คือ 0 – 10, 0, 0 + 10 = -10, 0, 10

```
> aveachval <- c(45, 55, 65)
> diffachval <- c(-10, 0, 10)
```

```
> interact_plot(model=out4m1a, pred=diffach, modx=aveach, modx.values=aveachval)
```

ยิ่งโรงเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง เด็กยิ่งเรียนเก่งขึ้น การรับรู้ความสามารถตนเองยิ่งดีขึ้น แต่โรงเรียนที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ การรับรู้ความสามารถของตนเองของเด็กจะไม่แตกต่างกัน



```
> ss41 <- sim_slopes(model=out4m1a, pred=diffach, modx=aveach, modx.values=aveachval)
> ss41
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When aveach is OUTSIDE the interval [29.52, 49.25], the slope of
diffach is p < .05.

Note: The range of observed values of aveach is [38.42, 73.67]

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of diffach when aveach = 45.00:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  0.01   0.03     0.41   0.68
```

เมื่อโรงเรียนมีผลสัมฤทธิ์น้อย ไม่ว่านักเรียนจะมีผลสัมฤทธิ์น้อยหรือมากก็ไม่มีผลอย่างมีนัยสำคัญต่อการรับรู้ความสามารถของตนเอง

```
Slope of diffach when aveach = 55.00:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  0.11   0.03     4.30   0.00
```

เมื่อโรงเรียนมีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง ยิ่งผลสัมฤทธิ์มากขึ้นจะทำให้การรับรู้ความสามารถของตนเองสูงขึ้น

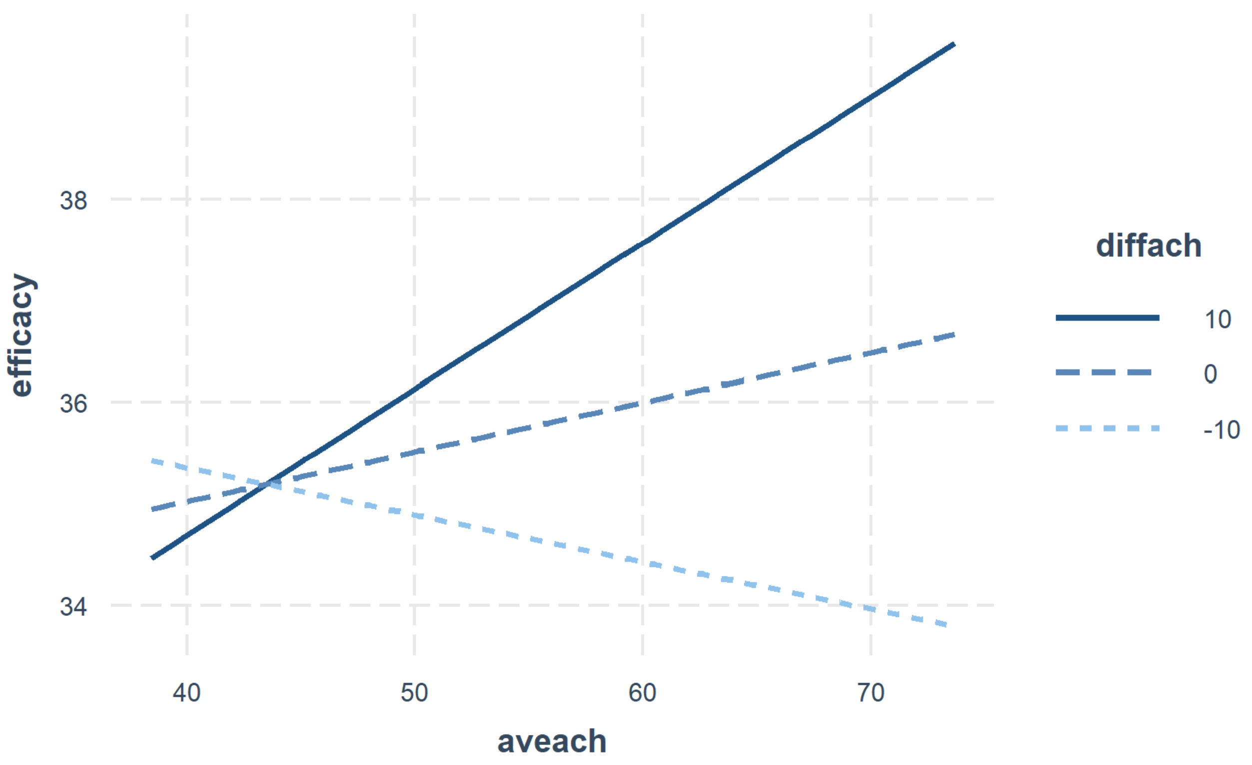
```
Slope of diffach when aveach = 65.00:

  Est.   S.E.   t val.      p
------ ------ -------- ------
  0.20   0.04     5.41   0.00
```

เมื่อโรงเรียนมีผลสัมฤทธิ์สูงยิ่งผลสัมฤทธิ์มากขึ้นจะทำให้การรับรู้ความสามารถของตนเองสูงขึ้น

```
> interact_plot(model=out4m1a, pred=aveach, modx=diffach, modx.values=diffachval)
```

เทียบระหว่างเด็กที่อ่อนสุดในโรงเรียน พบว่าโรงเรียนที่อ่อน เด็กจะมีการรับรู้ความสามารถตนเองดีกว่าโรงเรียนเก่ง แต่เทียบระหว่างเด็กเก่งภายในโรงเรียน พบว่าโรงเรียนที่อ่อน เด็กจะมีการรับรู้ความสามารถตนเองแย่กว่าโรงเรียนเก่ง



```
> ss42 <- sim_slopes(model=out4m1a, pred=aveach, modx=diffach, modx.values=diffachval)
> ss42
```

JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When diffach is **OUTSIDE** the interval [-14.77, -0.55], the slope of aveach is p < .05.

Note: The range of observed values of diffach is [-44.09, 31.29]

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of aveach when diffach = -10.00:

Est.	S.E.	t val.	p
-0.05	0.04	-1.24	0.22

เทียบระหว่างเด็กอ่อนในโรงเรียนต่างๆ การรับรู้ความสามารถของตนเอง ระหว่างเด็กอ่อนในโรงเรียนเก่งและเด็กอ่อนในโรงเรียนไม่เก่งไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

Slope of aveach when diffach = 0.00:

Est.	S.E.	t val.	p
0.05	0.02	2.15	0.04

เทียบระหว่างเด็กผลเรียนระดับปานกลางในโรงเรียน ยิ่งอยู่ในโรงเรียนเก่งขึ้น การรับรู้ความสามารถในตนเองยิ่งดีขึ้น

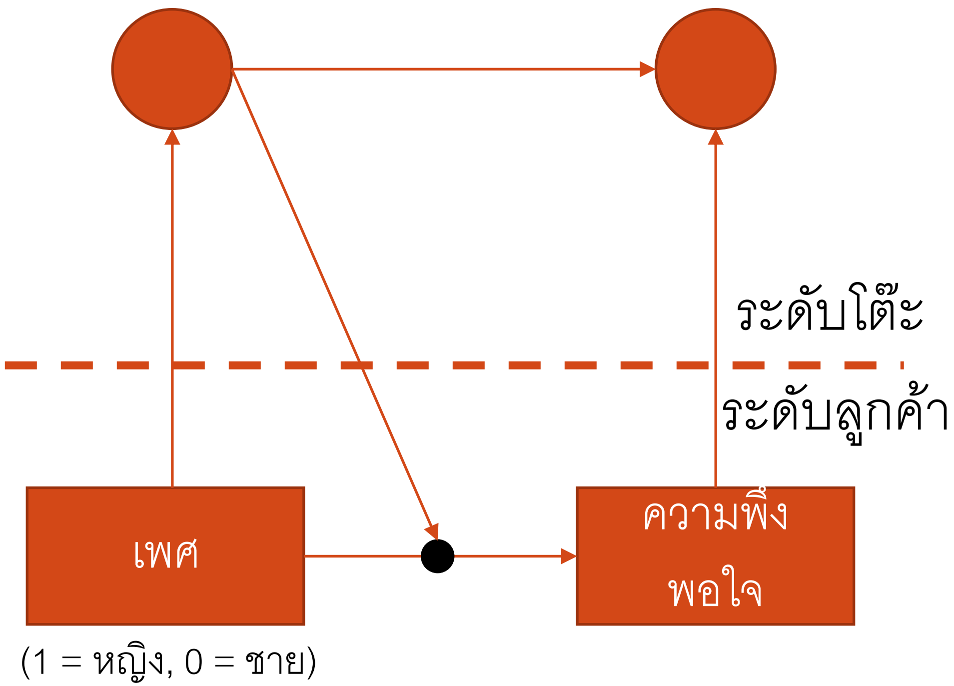
Slope of aveach when diffach = 10.00:

Est.	S.E.	t val.	p
0.14	0.03	4.58	0.00

เทียบระหว่างเด็กผลเรียนระดับสูงในโรงเรียน ยิ่งอยู่ในโรงเรียนเก่งขึ้น การรับรู้ความสามารถในตนเองยิ่งดีขึ้น

ตัวอย่างที่ 2 ผลที่แตกต่างกันของการย้ายศูนย์กลาง

นักวิจัยต้องการศึกษาความพึงพอใจ
ในการใช้บริการร้านอาหารจากแต่ละโต๊ะ



No Centering

```
> dat3$avefemale <- ave(dat3$female, dat3$tableid)
> out3g1 <- lmer(sat ~ 1 + female + avefemale
+                + (1|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> out3g2 <- lmer(sat ~ 1 + female + avefemale
+                + (1 + female|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> anova(out3g1, out3g2)
Data: dat3
Models:
out3g1: sat ~ 1 + female + avefemale + (1 | tableid)
out3g2: sat ~ 1 + female + avefemale + (1 + female | tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3g1  5 16940 16969 -8465.1    16930
out3g2  7 16937 16977 -8461.3    16923 7.704      2    0.02124 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ความแตกต่างระหว่างเพศในการประเมินความพึงพอใจแตกต่างกันระหว่างโต๊ะ

No Centering

ทดสอบว่าสัดส่วนของเพศหญิงภายในโต๊ะ มีอิทธิพลต่อความแตกต่างในการประเมินของเพศหญิงและเพศชายภายในโต๊ะหรือไม่

```
> out3g3 <- lmer(sat ~ 1 + female + avefemale + female:avefemale
+                  + (1 + female|tableid), data=dat3, REML=FALSE)
> anova(out3g2, out3g3)
Data: dat3
Models:
out3g2: sat ~ 1 + female + avefemale + (1 + female | tableid)
out3g3: sat ~ 1 + female + avefemale + female:avefemale + (1 + female |
out3g3:     tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3g2  7 16937 16977 -8461.3    16923
out3g3  8 16934 16980 -8459.2    16918 4.1516      1    0.04159 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

พบว่าสัดส่วนของเพศหญิงภายในโต๊ะ มีอิทธิพลต่อความแตกต่างในการประเมินของเพศหญิงและเพศชายภายในโต๊ะอย่างมีนัยสำคัญ

No Centering

```
> summary(out3m1c)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + female + avefemale + female:avefemale + (1 + female | tableid)
   Data: dat3

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16934.4  16980.2  -8459.2  16918.4     2254

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.09389 -0.61477 -0.00542  0.61149  2.74930

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 tableid  (Intercept) 55.48    7.448
          female      10.22    3.198    0.06
 Residual             72.89    8.538
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
                 Estimate Std. Error t value
(Intercept)       66.5712     0.9541  69.774
female            -3.8363     1.2456  -3.080   sig
avefemale         -3.6460     1.9185  -1.900   Not sig
female:avefemale   4.6837     2.2916   2.044   sig
```

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 66.57 - 3.65\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -3.84 + 4.68\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .06$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 55.48$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 10.22$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 72.89$$

No Centering

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 66.57 - 3.65\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -3.84 + 4.68\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .06$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 55.48$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 10.22$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 72.89$$

$$Y_{ij} = 66.57 - 3.65\bar{X}_{1ij} - 3.84X_{1ij} + 4.68X_{1ij}\bar{X}_{1ij} + u_{0j} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}$$

อิทธิพลระหว่างกลุ่ม $\bar{Y}_{.j} = 66.57 + (-3.65 - 3.84 + u_{1j})\bar{X}_{1.j} + 4.68\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j}$

อิทธิพลภายในกลุ่ม $Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = (-3.84 + 4.68\bar{X}_{1.j} + u_{1j})(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$

เมื่อสัดส่วนเพศหญิงในโต๊ะเท่ากับ 0 (โต๊ะชายล้วน) เพศชายจะมีคะแนนประเมิน 66.57 แต้ม

เมื่อสัดส่วนเพศหญิงในโต๊ะเท่ากับ 0 (โต๊ะชายล้วน) เพศหญิงจะมีแนวโน้มประเมินน้อยกว่าเพศชาย 3.84 แต้ม

ลูกค้าเพศชายในโต๊ะหญิงล้วนจะให้คะแนนประเมินน้อยกว่าลูกค้าเพศชายในโต๊ะชายล้วนเฉลี่ย 7.49 แต้ม (Instantaneous Rate of Change at $\bar{X}_{1.j} = 0$)

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + e_{ij}$$

$$\beta_{0j} = 66.57 - 3.65\bar{X}_{1.j} + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = -3.84 + 4.68\bar{X}_{1.j} + u_{1j}$$

$$\text{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .06$$

$$\text{Var}(u_{0j}) = 55.48$$

$$\text{Var}(u_{1j}) = 10.22$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = 72.89$$

No Centering

$$Y_{ij} = 66.57 - 3.65\bar{X}_{1ij} - 3.84X_{1ij} + 4.68X_{1ij}\bar{X}_{1ij} + u_{0j} + X_{1ij}u_{1j} + e_{ij}$$

อิทธิพลระหว่างกลุ่ม $\bar{Y}_{.j} = 66.57 + (-3.65 - 3.84 + u_{1j})\bar{X}_{1.j} + 4.68\bar{X}^2_{1.j} + u_{0j}$

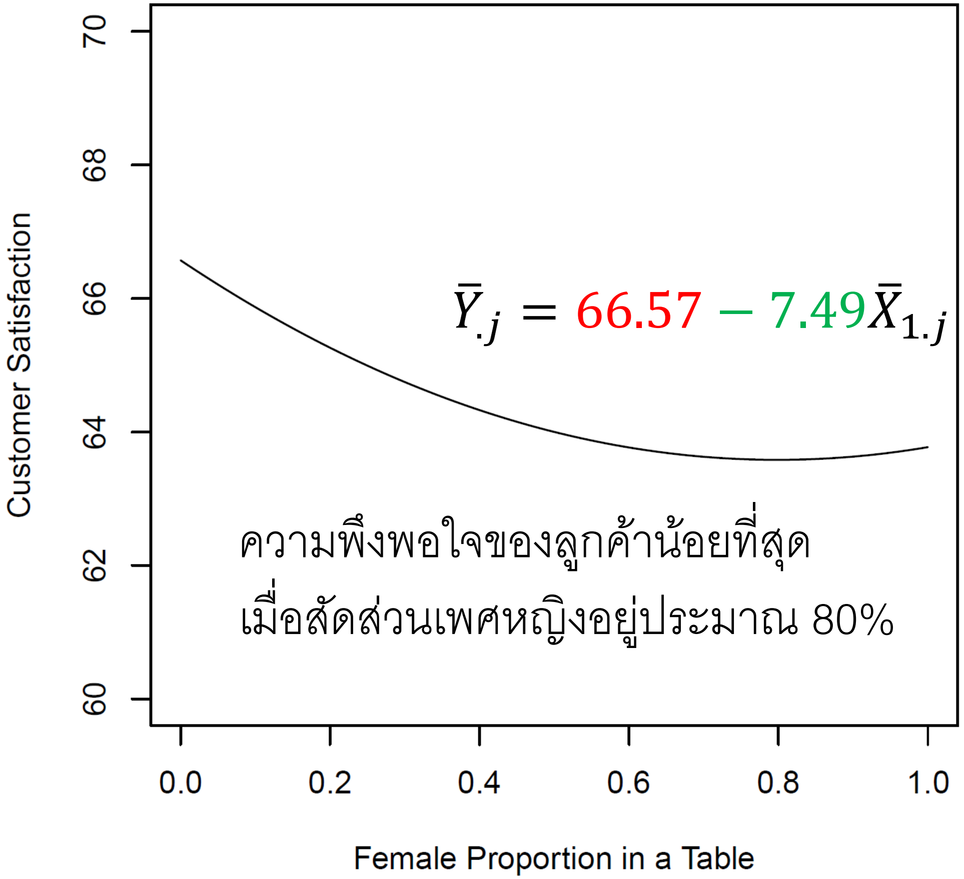
อิทธิพลภายในกลุ่ม $Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = (-3.84 + 4.68\bar{X}_{1.j} + u_{1j})(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$

ความแตกต่างระหว่างคะแนนประเมินจากลูกค้าเพศหญิงและเพศชายในโต๊ะหญิงล้วน จะสูงกว่าความแตกต่างดังกล่าวในโต๊ะชายล้วน 4.68 แต้ม

หากเปลี่ยนจากโต๊ะหญิงล้วนเป็นโต๊ะชายล้วน ค่าความชันของอิทธิพลสัดส่วนเพศของโต๊ะต่อความพึงพอใจจะเปลี่ยนแปลง 4.68 แต้ม

No Centering

ระดับของอิทธิพล	ขนาดอิทธิพลเฉลี่ย
ระหว่างกลุ่ม	$\left(-3.65-3.84+4.68\bar{X}_{1.j}\right)\bar{X}_{1.j}$ $=-7.49\bar{X}_{1.j}+4.68\bar{X}_{1.j}^2$
ภายในกลุ่ม	$\left(-3.84+4.68\bar{X}_{1.j}\right)\left(X_{1ij}-\bar{X}_{1.j}\right)$



$$\bar{Y}_{.j}=66.57-7.49\bar{X}_{1.j}+4.68\bar{X}_{1.j}^2$$

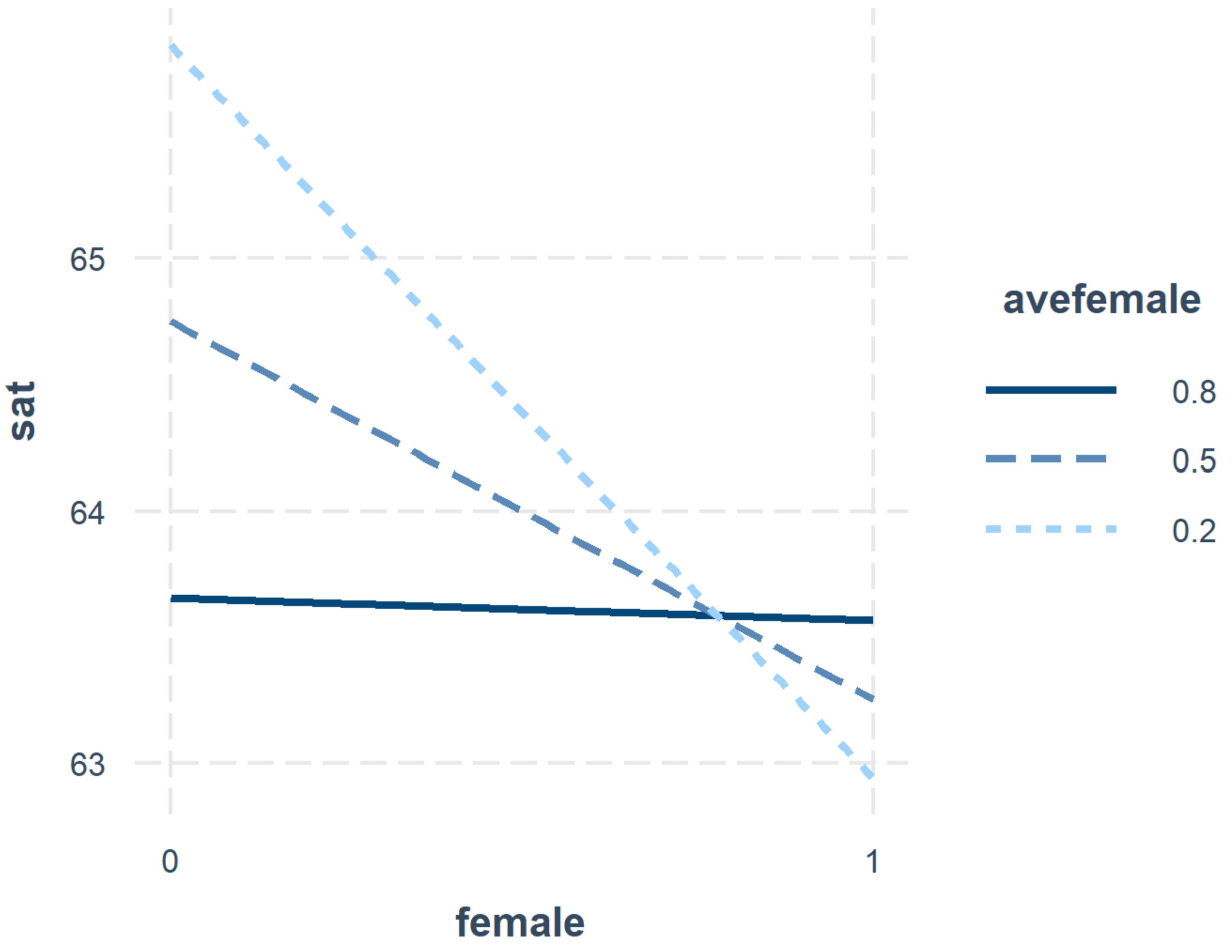
ความพึงพอใจของลูกค้าน้อยที่สุด
เมื่อสัดส่วนเพศหญิงอยู่ประมาณ 80%

$$-\frac{b_1}{2b_2}=-\frac{-7.49}{2\times 4.68}=.8$$

```
> interact_plot(model=out3g3, pred=female, modx=avefemale, modx.values=avefemaleval)
```

เพศชายจะพึงพอใจสูงกว่าเพศหญิงเมื่อสัดส่วนโต๊ะมีเพศหญิงน้อย

แต่เพศชายและเพศหญิงจะพึงพอใจแทบไม่แตกต่างกันเมื่อสัดส่วนโต๊ะมีเพศหญิงเยอะกว่า



```
> ss31 <- sim_slopes(model=out3g3, pred=female, modx=avefemale, modx.values=avefemaleval)

> ss31
JOHNSON-NEYMAN INTERVAL

When avefemale is OUTSIDE the interval [0.61, 8.24], the slope of female is p <
.05.

Note: The range of observed values of avefemale is [0.00, 1.00]

SIMPLE SLOPES ANALYSIS

Slope of female when avefemale = 0.20:

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -2.90   0.84    -3.46   0.00
```

ในโต๊ะที่ส่วนใหญ่เป็นเพศชาย เพศหญิงจะประเมินน้อยกว่าเพศชายอย่างมีนัยสำคัญ

```
Slope of female when avefemale = 0.50:

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -1.49   0.45    -3.35   0.00
```

ในโต๊ะที่ส่วนใหญ่เป็นเพศหญิงและชายพอกัน เพศหญิงจะประเมินน้อยกว่าเพศชายอย่างมีนัยสำคัญ

```
Slope of female when avefemale = 0.80:

   Est.   S.E.   t val.      p
------- ------ -------- ------
  -0.09   0.81    -0.11   0.91
```

ในโต๊ะที่ส่วนใหญ่เป็นเพศหญิง เพศชายและหญิงประเมินไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

Group Mean Centering

```
> dat3$avefemale <- ave(dat3$female, dat3$tableid)
> dat3$difffemale <- dat3$female - dat3$avefemale
>
> out3f1 <- lmer(sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1|tableid),
+               data=dat3, REML=FALSE,
+               control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> summary(out3f1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1 | tableid)
   Data: dat3
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16940.3  16968.9  -8465.1  16930.3     2257

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.15838 -0.63360 -0.00586  0.61192  2.75216

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 tableid  (Intercept) 60.12    7.753
 Residual             75.45    8.686
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  65.6444     0.8822  74.409
difffemale   -1.5293     0.4175  -3.663   sig
avefemale    -2.6546     1.5320  -1.733   Not sig
```

อิทธิพลระหว่างกลุ่มเท่ากับ -2.65 ซึ่งไม่ถึงระดับนัยสำคัญ

อิทธิพลภายในกลุ่มเท่ากับ -1.53 ซึ่งถึงระดับนัยสำคัญ

$$\beta_{0j} = 65.64 - 2.65\bar{X}_{1.j} + u_{0j}; \beta_{1j} = -1.53 + u_{1j} \qquad \text{Var}(u_{0j}) = 60.12$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij} \qquad \text{Var}(e_{ij}) = 75.45$$

Group Mean Centering

```
> out3f2 <- lmer(sat ~ 1 + difffemale + avefemale
+                 + (1 + difffemale|tableid), data=dat3, REML=FALSE,
+                 control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out3f1, out3f2)
Data: dat3
Models:
out3f1: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1 | tableid)
out3f2: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1 + difffemale | tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3f1  5 16940 16969 -8465.1    16930
out3f2  7 16938 16978 -8461.9    16924 6.4746      2    0.03927 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ความแตกต่างระหว่างเพศในการประเมินความพึงพอใจแต่ละโต๊ะแตกต่างกัน

อย่างมีนัยสำคัญระหว่างโต๊ะ

Group Mean Centering

```
> out3f3 <- lmer(sat ~ 1 + difffemale + avefemale + difffemale:avefemale
+                + (1 + difffemale|tableid), data=dat3, REML=FALSE,
+                control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out3f2, out3f3)
Data: dat3
Models:
out3f2: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1 + difffemale | tableid)
out3f3: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + difffemale:avefemale + (1 +
out3f3:     difffemale | tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3f2  7 16938 16978 -8461.9    16924
out3f3  8 16939 16985 -8461.3    16923 1.1424      1     0.2851
```

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพศภายในโต๊ะและสัดส่วนเพศหญิงของโต๊ะไม่ถึงระดับนัยสำคัญ กล่าวคือ สัดส่วนของเพศหญิงของโต๊ะไม่ได้เป็นสิ่งอธิบายความแตกต่างระหว่างเพศในการประเมินความพึงพอใจที่แตกต่างกันระหว่างโต๊ะอย่างมีนัยสำคัญ

เนื่องจากการวิเคราะห์เมื่อไม่ย้ายศูนย์กลาง พบว่า female และ avefemale มีปฏิสัมพันธ์กันซึ่งอาจเป็นไปได้ว่า avefemale มีอิทธิพลเชิงเส้นโค้งต่อความพึงพอใจ จึงทดสอบอิทธิพลเชิงเส้นโค้งเพิ่ม

```
> out3f4 <- lmer(sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2)
+                + (1 + difffemale|tableid), data=dat3, REML=FALSE,
+                control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out3f2, out3f4)
Data: dat3
Models:
out3f2: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + (1 + difffemale | tableid)
out3f4: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2) + (1 + difffemale |
out3f4:     tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3f2  7 16938 16978 -8461.9    16924
out3f4  8 16935 16981 -8459.4    16919 5.0536      1    0.02457 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

สัดส่วนเพศของโต๊ะ มีอิทธิพลเชิงเส้นโค้งต่อระดับความพึงพอใจของลูกค้าอย่างมีนัยสำคัญ

Group Mean Centering

```
> out3f5 <- lmer(sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2)
+                + avefemale:difffemale + I(avefemale^2):difffemale
+                + (1 + difffemale|tableid), data=dat3, REML=FALSE,
+                control = lmerControl(optimizer ="Nelder_Mead"))
> anova(out3f4, out3f5)
Data: dat3
Models:
out3f4: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2) + (1 + difffemale |
out3f4:     tableid)
out3f5: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2) + avefemale:difffemale +
out3f5:     I(avefemale^2):difffemale + (1 + difffemale | tableid)
       Df   AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
out3f4  8 16935 16981 -8459.4    16919
out3f5 10 16938 16995 -8458.8    16918 1.2531      2     0.5344
```

ยืนยันอีกครั้งหนึ่ง ว่าสัดส่วนเพศของโต๊ะ ไม่มีอิทธิพลอย่างมีนัยสำคัญ ต่อความแตกต่างระหว่างเพศในความพึงพอใจ (กล่าวคือ ยืนยันว่าไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ)

Group Mean Centering

```
> summary(out3f4)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: sat ~ 1 + difffemale + avefemale + I(avefemale^2) + (1
   Data: dat3
Control: lmerControl(optimizer = "Nelder_Mead")

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 16934.8  16980.6  -8459.4  16918.8     2254

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.10038 -0.62581 -0.01142  0.60715  2.78700

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 tableid  (Intercept) 59.99    7.745
          difffemale  10.38    3.223    0.26
 Residual             72.91    8.538
Number of obs: 2262, groups:  tableid, 500

Fixed effects:
               Estimate Std. Error t value
(Intercept)     67.6715     1.2386  54.634
difffemale      -1.4859     0.4449  -3.340   sig
avefemale      -13.1943     4.8760  -2.706   sig
I(avefemale^2)  10.2163     4.5320   2.254   sig
```

$$\mathrm{Cor}(u_{0j}, u_{1j}) = .26$$

$$\mathrm{Var}(u_{0j}) = 59.99$$

$$\mathrm{Var}(u_{1j}) = 10.38$$

$$\mathrm{Var}(e_{ij}) = 72.91$$

$$\beta_{0j} = 67.67 - 13.19\bar{X}_{1.j} + 10.22\bar{X}_{1.j}^2 + u_{0j}; \beta_{1j} = -1.49 + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + e_{ij}$$

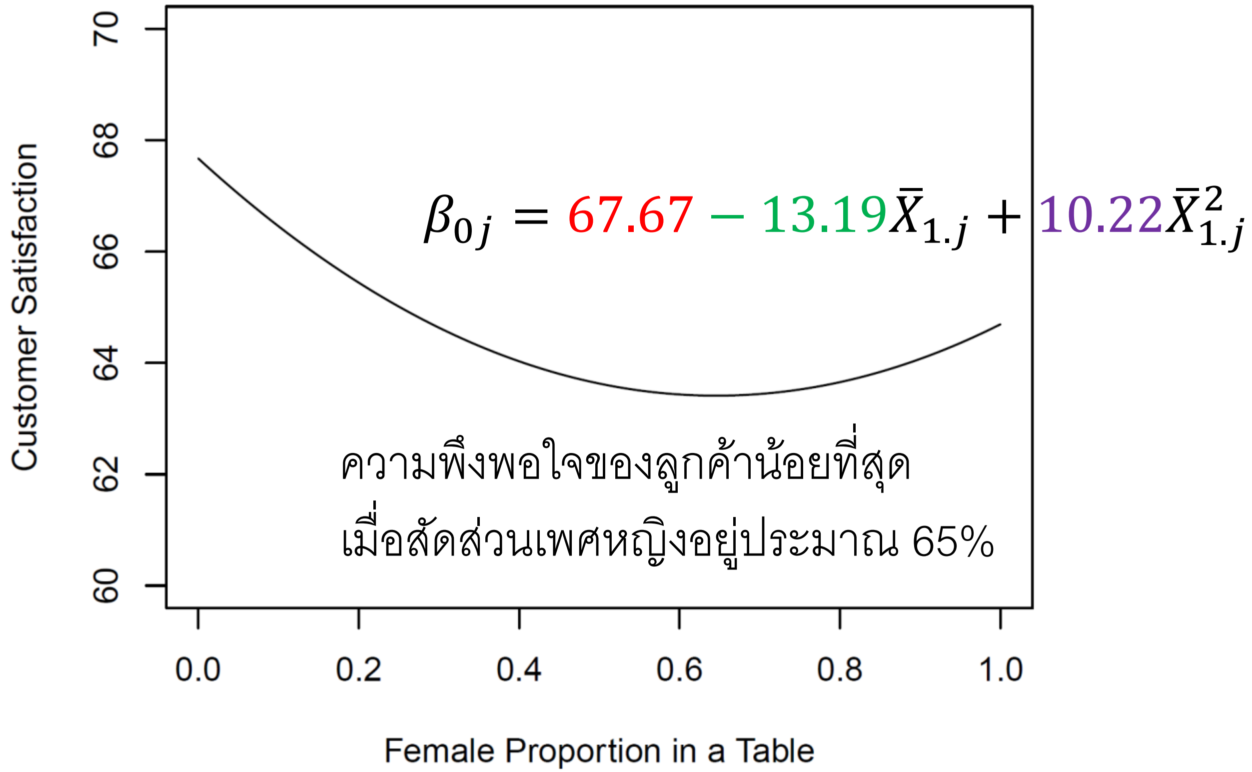
Group Mean Centering

$$\beta_{0j} = 67.67 - 13.19\bar{X}_{1.j} + 10.22\bar{X}_{1.j}^{2} + u_{0j}; \beta_{1j} = -1.49 + u_{1j}$$

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ค่าเฉลี่ยของความพึงพอใจของโต๊ะที่ลูกค้าเป็นเพศชายล้วนเท่ากับ 67.67 แต้ม

เปรียบเทียบกันภายในโต๊ะ เพศหญิงจะมีความพึงพอใจน้อยกว่าเพศชาย 1.49 แต้ม



ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มหรือไม่

- การย้ายศูนย์กลางเป็นเรื่องที่แปลก ความรู้เรื่องนี้มีมากแล้ว แต่ในวงการวิชาการยังมีความคิดเห็นไม่ตรงกันเกี่ยวกับการแปลความหมายค่าต่างๆ ภายในโมเดล
  - เช่น Enders & Tofighi (2007) vs. Snijders & Bosker (2012)
- ถ้าดูการไล่ความหมายของค่าต่างๆ ในโมเดลข้างบน จะพบว่า
  - การใส่ตัวแปรเฉยๆ โดยไม่ทำ Group-mean centering จะมีข้อตกลงเบื้องต้นว่า อิทธิพลระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่มเท่ากัน ซึ่งไม่เป็นเช่นนั้นเสมอไป
  - การใส่ตัวแปรเฉยๆ โดยไม่ทำ Group-mean centering พร้อมกับใส่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ค่า γ_{10} เป็นค่าอิทธิพลของค่าเบี่ยงเบนภายในกลุ่ม ซึ่งนักวิจัยหลายคนที่ผมเคยพบ จะมองว่าไม่ใช่ อิทธิพลของค่าเบี่ยงเบนภายในกลุ่ม (ซึ่งต้องใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มเท่านั้นถึงจะพบ) ☹
  - การใส่ตัวแปรเฉยๆ โดยไม่ทำ Group-mean centering พร้อมกับใส่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ให้มีปฏิสัมพันธ์ข้ามระดับ จะทำให้อิทธิพลระหว่างกลุ่มเป็นอิทธิพลเชิงเส้นโค้ง

ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มหรือไม่

- ด้วยเหตุผลเหล่านี้ ผมจึงขอสรุปว่า
  1. ไม่ว่าจะใช้ Group-mean-centering ในตัวแปรระดับที่หนึ่งหรือไม่ ผู้วิจัยต้องใส่ตัวแปรค่าเฉลี่ยในระดับที่สองเสมอ (ดู Rights, Preacher, & Cole, 2020)
     - กรณีที่จะไม่ใส่ค่าเฉลี่ยระดับที่สอง ทำได้เมื่อ
       A. ไม่มีความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยในระดับกลุ่ม เช่น ทุกกลุ่มมี 2 คนและคนหนึ่งเป็นเพศชาย อีกคนเป็นเพศหญิงเสมอ
       B. ตามทฤษฎีแล้ว อิทธิพลในระดับที่สองไม่ต่างกับอิทธิพลในระดับที่หนึ่ง เช่น
          a) โมเดลพัฒนาการ ที่คนหนึ่งวัดติดต่อกันทุกเดือนเป็นเวลา 3 เดือน (เดือนที่ 0, 1, 2) แต่อีกคนวัดทุกเดือนติดต่อกันเป็นเวลา 4 เดือน (เดือนที่ 0, 1, 2, 3) แล้วนักวิจัยไม่มีเหตุผลที่คนวัด 3 เดือน (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1) แตกต่างจากคนที่วัด 4 เดือน (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.5)
          b) การทดลองหลายสถานที่พร้อมกัน (Multisite Experiment) ที่บางทีอาจสุ่มเข้ากลุ่มทดลองมากหน่อย บางที่สุ่มเข้ากลุ่มน้อยหน่อย สัดส่วนนี้ตามทฤษฎีไม่ควรส่งผลต่อตัวแปรตาม
     - กรณีเหล่านี้ ผู้วิจัยจะใส่ตัวแปรต้น โดยไม่ทำ Group mean centering เพื่อให้แปลความหมายค่าสัมประสิทธิ์ภายในโมเดลได้ง่าย

ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มหรือไม่

- ด้วยเหตุผลเหล่านี้ ผมจึงขอสรุปว่า

2. หากทดสอบแล้ว พบว่าอิทธิพลระหว่างกลุ่ม และอิทธิพลภายในกลุ่มไม่แตกต่างกัน ให้ลดรูปเหลือตัวแปรต้นแบบไม่ทำ Group mean centering ได้
3. หากทดสอบแล้ว พบว่าไม่พบอิทธิพลระหว่างกลุ่ม ให้ลดรูปเหลือตัวแปรต้นแบบทำ Group mean centering ได้
4. หากลดรูปไม่ได้ ต้องใส่ทั้งตัวแปรต้นทั้งระดับที่ 1 และ 2 ผมแนะนำให้ใช้ Group mean centering เพราะการแปลความหมายง่ายกว่า เสี่ยงต่อความผิดพลาดน้อยกว่า
5. หากมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับภายในตัวแปรเดียวกัน จำเป็นต้องใช้ Group mean centering เพื่อหลีกเลี่ยงความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้งในระดับกลุ่ม

ควรย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มหรือไม่

- Snijders & Bosker (2012) ได้บอกว่าการย้ายศูนย์กลางแบบค่าเฉลี่ยกลุ่ม ควรใช้เฉพาะต้องการตรวจสอบอิทธิพลของผลกบในหนองน้ำ (Frog pond effect) เท่านั้น ซึ่งแย้งกับผมด้านบน เพราะ Frog pond effect สามารถหาได้ แม้จะไม่ใช้ Group-mean centering ถ้าใส่ค่าเฉลี่ยระดับกลุ่มลงไป

ตัวแปรอิสระระดับบุคคล	ตัวแปรอิสระระดับกลุ่ม	อิทธิพลภายในกลุ่ม $X_{ij} - \bar{X}_{.j} \rightarrow Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$	อิทธิพลภายนอกกลุ่ม $\bar{X}_{.j} \rightarrow \bar{Y}_{.j}$
X_{ij}	-	γ_{10}	γ_{10}
$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	-	γ_{10}	-
X_{ij}	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	$\gamma_{10} + \gamma_{01}$
$X_{ij} - \bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.j} \rightarrow \beta_{0j}$	γ_{10}	γ_{01}

คาบต่อไป

- สัมประสิทธิ์การทำนาย
- การบ้านที่ 6

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 40 + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j} \qquad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - 10) + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 25 + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j} \qquad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 50)$

L2:
$$\beta_{0j} = 40 + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 40 + 0.1\bar{X}_{.j} + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - 10) + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 50)$

L2: $\beta_{0j} = 25 + 0.1\bar{X}_{.j} + 2(W_j - 2) + u_{0j}$
$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j}$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 40 + 0.1\bar{X}_{.j} + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.1(W_j - 2) + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + e_{ij} \qquad e_{ij} \sim N(0, 50)$$

L2: $$\beta_{0j} = 40 + 0.1\bar{X}_{.j} + 2(W_j - 2) + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = -1.5 + 0.01\bar{X}_{.j} + 0.1(W_j - 2) + u_{1j} \qquad \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & \\ -3.8 & 3.8 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนซ้อนในโรงเรียน
- X_{ij} = จำนวนวันที่หยุดเรียน
- W_j = ขนาดโรงเรียน (หน่วยร้อยคน)

แบบฝึกหัด

L1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + e_{ij}$ $\quad e_{ij} \sim N(0, 36)$

L2:
$$\beta_{0j} = 45 + 0.001\bar{X}_{.j} - 0.5W_{1j} + 4W_{2j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = 19 - 0.2W_{1j} + 2W_{2j} + u_{1j}$$
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & \\ 2.5 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

- Y_{ij} = คะแนนอารมณ์ทางบวกในแต่ละวันซ้อนในผู้เข้าร่วมการทดลอง;
- X_{ij} = วันสุดสัปดาห์ (1 = ใช่; 0 = ไม่ใช่)
- W_{1j} = คะแนนความอ่อนไหวทางอารมณ์ (Neuroticism)
- W_{2j} = เพศ (1 = หญิง; 0 = ชาย)