ขนาดอิทธิพล
(Effect Size)

โมเดลพหุระดับ (Multilevel Modeling)

สันทัด พรประเสริฐมานิต

โครงร่างการนำเสนอ

- การแบ่งความแปรปรวน
- สัมประสิทธิ์การทำนาย (Coefficient of Determination)
- โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
- สัมประสิทธิ์การทำนายที่แตกต่างกันระหว่างโมเดล
- สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน (Standardized Regression Coefficient)

การแบ่งความแปรปรวน

- ในเบื้องต้น ให้ตัวแปรระดับที่หนึ่ง จะให้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม โดยที่ใส่ค่าเฉลี่ยกลุ่มเข้าไปในโมเดลด้วย เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{12}W_{1j} + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} Y_{ij} = {} & \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\ & + \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) \\ & + \gamma_{12}W_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + u_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + u_{0j} + e_{ij} \end{aligned}$$

การแบ่งความแปรปรวน

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 4 กลุ่มได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} = {} & \gamma_{10}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) + \gamma_{12}W_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) \\
& + \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\
& + u_{0j} + u_{1j}\left(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}\right) \\
& + e_{ij}
\end{aligned}
$$

- แบ่งเป็นดังนี้
    - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร (Level-1 Predictors via Fixed Slopes)
        - ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับอยู่ในกลุ่มนี้ เพราะความชันของตัวแปรต้นระดับที่ 1 สามารถกำหนดได้ด้วยค่าของตัวแปรต้นระดับที่ 2
    - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร (Level-2 Predictors via Fixed Slopes)
    - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2
    - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 1

การแบ่งความแปรปรวน

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 4 กลุ่มได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} = {} & \gamma_{10}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{11}\bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) + \gamma_{12}W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\
& + \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{X}_{1.j} + \gamma_{02}W_{1j} \\
& + u_{0j} + u_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\
& + e_{ij}
\end{aligned}
$$

- สามารถเขียนรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$
Y_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij}
$$

การแบ่งความแปรปรวน

- ดังนั้น ความแปรปรวนของ Y_{ij} สามารถกระจายได้ดังนี้

$$Var(Y_{ij}) = Var\left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij}\right)$$

- เนื่องจากใช้การย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ตัวแปรต้นระดับที่ 1 และตัวแปรต้นระดับที่ 2 จะไม่สัมพันธ์กัน ความแปรปรวนของ Y_{ij} จึงเท่ากับความแปรปรวนของแต่ละส่วนโดยตรง

$$Var(Y_{ij}) = Var\left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}\right) + Var\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \end{bmatrix}\right)$$
$$+Var\left(\begin{bmatrix} 1 \\ X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix}\right) + Var(e_{ij})$$

$$Var(Y_{ij}) = \begin{bmatrix}\gamma_{10}\\\gamma_{11}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}' Var\left(\begin{bmatrix}X_{1ij}-\bar{X}_{1.j}\\\bar{X}_{1.j}(X_{1ij}-\bar{X}_{1.j})\\W_{1j}(X_{1ij}-\bar{X}_{1.j})\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_{10}\\\gamma_{11}\\\gamma_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{00}\\\gamma_{01}\\\gamma_{02}\end{bmatrix}' Var\left(\begin{bmatrix}1\\\bar{X}_{1.j}\\W_{1j}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_{00}\\\gamma_{01}\\\gamma_{02}\end{bmatrix}$$
$$+tr\left(Var\left(\begin{bmatrix}u_{0j}\\u_{1j}\end{bmatrix}\right)Var\left(\begin{bmatrix}1\\X_{1ij}-\bar{X}_{1.j}\end{bmatrix}\right)\right)+\tau_{00}+\sigma^2$$

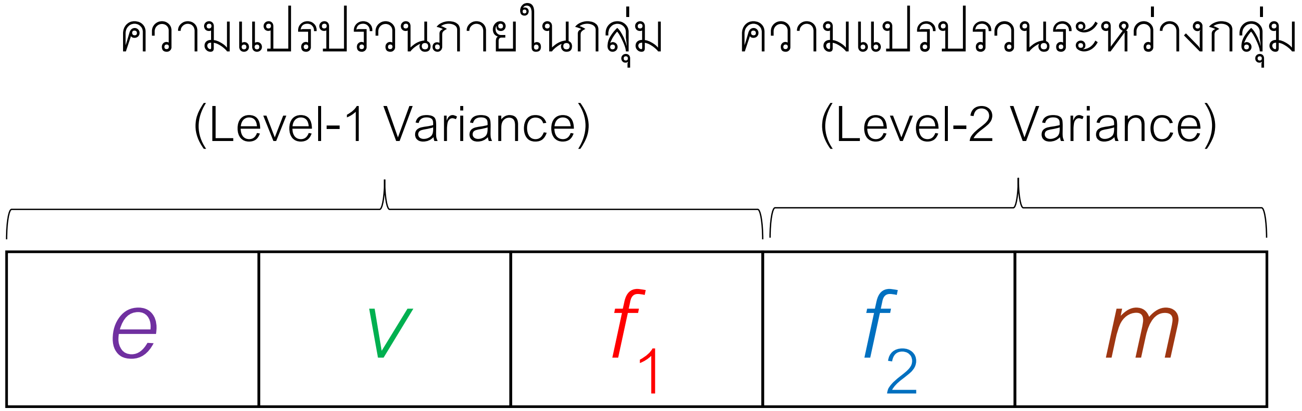
$$\boxed{Var(Y_{ij}) = f_1 + f_2 + v + m + e}$$

กล่าวคือ หากตัวแปรต้นระดับที่ 1 ตั้งศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มทั้งหมดแล้ว ความแปรปรวนของตัวแปรตามจะแบ่งออกเป็น 5 ส่วน (Rights & Sterba, 2019) ดังนี้

1. f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร
2. f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร
3. v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันสุ่ม
4. m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่มที่ปรับแล้วที่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
5. e = ความแปรปรวนของตัวแปรตามระดับที่ 1 ที่ไม่สามารถอธิบายได้

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้



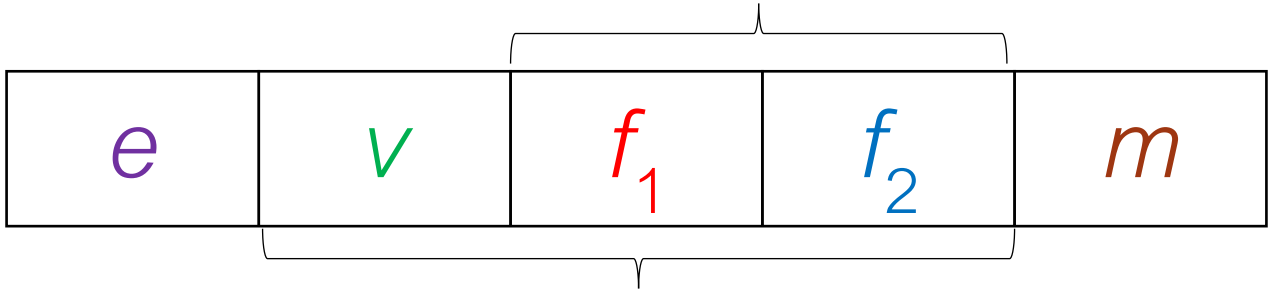
หากตัวแปรระดับที่ 1 ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม การแบ่งความแปรปรวนภายในกลุ่มและภายนอกกลุ่มจะไม่ง่ายแบบนี้ เพราะ f_1 จะมีส่วนผสมของความแปรปรวนระหว่างกลุ่มอยู่

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้

ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวร

(Variance Explained by All Predictors via Fixed Slopes)



ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวรและสุ่ม

(Variance Explained by All Predictors via Fixed and Random Slopes Variation)

การแบ่งความแปรปรวน

- การแบ่งความแปรปรวนจะแบ่งแยกได้ดังนี้

$$\boxed{e}\;\underbrace{\boxed{v}\;\boxed{f_1}\;\boxed{f_2}\;\boxed{m}}$$

ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมดผ่านความชันถาวรและสุ่ม
และค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่ม

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- นิยามของสัมประสิทธิ์การทำนายเป็นดังนี้

$$R^2 = \frac{\text{ความแปรปรวนที่อธิบายได้}}{\text{ความแปรปรวนทั้งหมด}}$$

- จากการแบ่งความแปรปรวนของตัวแปรตามในสมการพหุระดับเป็น 5 ส่วน ทำให้สัมประสิทธิ์การทำนายสามารถนิยามได้หลากหลายรูปแบบ
  - เศษของการคำนวณสมการสัมประสิทธิ์การทำนาย อาจใช้ f_1, f_2, v, m, f ($f_1 + f_2$), f_1v ($f_1 + v$), fv ($f_1 + f_2 + v$), หรือ fmv ($f_1 + f_2 + v + m$)
  - ส่วนของการคำนวณสมการสัมประสิทธิ์การทำนาย อาจใช้ ความแปรปรวนทั้งหมด t ($f_1 + f_2 + v + m + e$), ระหว่างกลุ่ม b ($f_2 + m$), หรือภายในกลุ่ม w ($f_1 + v + e$)

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- สัญลักษณ์ของสัมประสิทธิ์การทำนาย จะขึ้นกับเศษและส่วนที่ใช้คำนวณดังนี้

$$R_{?}^{2(?)}$$

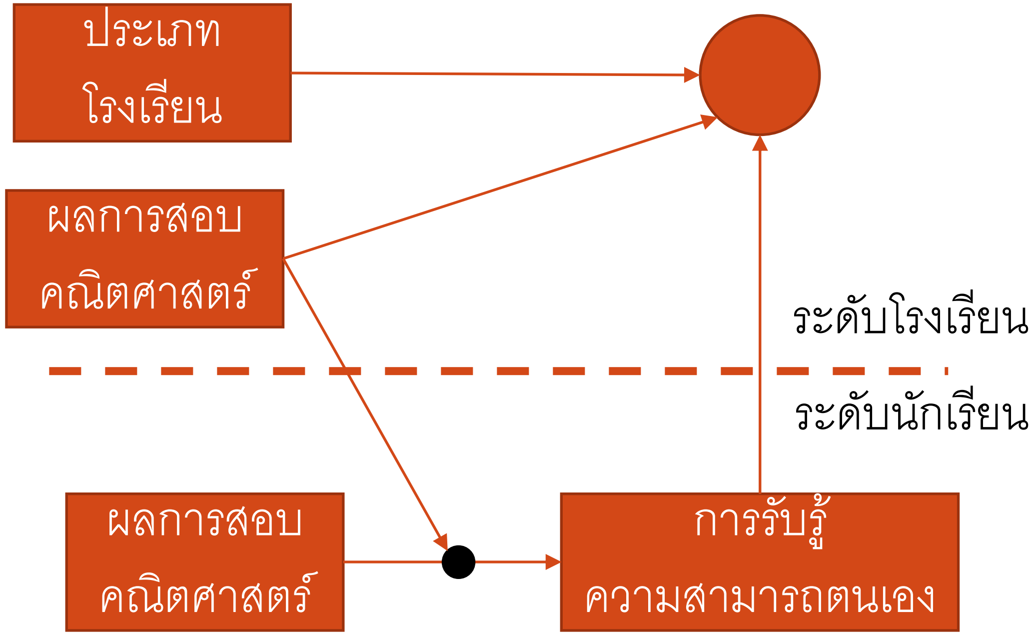
f_1, f_2, v, m, f, f_1v, fv, หรือ fmv

t, b, หรือ w

- เช่น
  - $R_t^{2(f_1)}$ คือ สัดส่วนความแปรปรวนของตัวแปรตามทั้งหมดที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่หนึ่งผ่านความชันถาวร
  - $R_w^{2(f_1v)}$ คือ สัดส่วนความแปรปรวนของตัวแปรตามภายในแต่ละกลุ่ม ที่ตัวแปรต้นภายในกลุ่มสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ (โดยไม่จำกัดว่าความชันของตัวแปรต้นดังกล่าวในทุกกลุ่มต้องเท่ากัน สามารถแตกต่างกันได้)

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- การเลือกใช้สัมประสิทธิ์การทำนาย ขึ้นอยู่กับการตีความหมายที่ผู้วิเคราะห์ต้องการ ขอใช้ตัวอย่างนี้อธิบาย



สัมประสิทธิ์การทำนาย

- แปลความหมายความแปรปรวนในแต่ละส่วน
  - f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียนเมื่อควบคุมให้ขนาดอิทธิพลต่อการรับรู้ความสามารถคงที่ในทุกโรงเรียน
  - f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์ของโรงเรียนและประเภทของโรงเรียน
  - v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียนที่เกิดจากขนาดอิทธิพลที่แตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
  - m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างโรงเรียน เมื่อควบคุมประเภทของโรงเรียนและผลการสอบคณิตศาสตร์เฉลี่ยของแต่ละโรงเรียนแล้ว
  - e = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของนักเรียน ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นใด หรือความแตกต่างระหว่างกลุ่มเลย

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- แปลความหมายความแปรปรวนในแต่ละส่วน
  - f = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียน เมื่อควบคุมให้ขนาดอิทธิพลของตัวแปรอิสระคงที่ทุกโรงเรียน
  - f_1v = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตำแหน่งผลการสอบคณิตศาสตร์ภายในแต่ละโรงเรียน โดยอนุญาตให้ขนาดอิทธิพลแตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
  - fv = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียน โดยอนุญาตให้ขนาดอิทธิพลของตัวแปรอิสระแตกต่างกันระหว่างโรงเรียน
  - fvm = ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นทั้งหมด รวมถึงการเป็นสมาชิกภาพของแต่ละโรงเรียน

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น
  - $R_t^{2(f)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเอง ที่ผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียนอธิบายได้ โดยมองว่าความชันสุ่ม เป็นสิ่งที่ตัวแปรต้นกำหนดไม่ได้ จึงไม่ได้รวมในการคำนวณ ค่านี้มักเรียกว่า Marginal total R^2 งานวิจัยทางจิตวิทยามักรายงานค่านี้

e	v	f_1	f_2	m

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น
  - $R_t^{2(fvm)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเอง ที่ผลการสอบคณิตศาสตร์และประเภทของโรงเรียนอธิบายได้ และการเป็นสมาชิกภาพโรงเรียนอธิบายได้ โดยมองว่าการเป็นสมาชิกโรงเรียน (จุดตัดสุ่มและความชันสุ่ม) เป็นสิ่งเรารู้และอธิบายได้ จึงรวมในการคำนวณ ค่านี้มักเรียกว่า Conditional total R^2

e	v	f_1	f_2	m

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น
  - $R_b^{2(f_2)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเองระดับโรงเรียน ที่ค่าเฉลี่ยผลการสอบคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนและประเภทของโรงเรียนอธิบายได้ ค่านี้จะใช้เทียบเคียงกับการวิเคราะห์ถดถอยในระดับโรงเรียนผ่านการวิเคราะห์แบบรวมยอด (Aggregation)

e	v	f_1	f_2	m

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- ตัวอย่างเช่น
  - $R_w^{2(f_1 v)}$ คือ ความแปรปรวนของการรับรู้ความสามารถของตนเองภายในแต่ละโรงเรียน ที่คะแนนผลการสอบคณิตศาสตร์อธิบายได้ ค่านี้จะใช้เทียบเคียงกับ R^2 ของการเก็บข้อมูลจากโรงเรียนเดียว แล้ววิเคราะห์ถดถอยระหว่างตัวแปรทั้งสอง (Regression within a level-2 group)

e	v	f_1	f_2	m

สัมประสิทธิ์การทำนาย

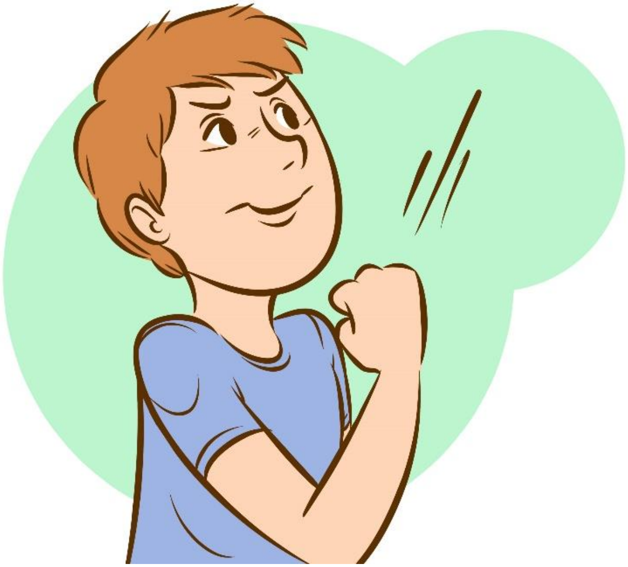
- แม้การแปลความหมายขึ้นอยู่กับผู้วิเคราะห์ การรายงานผลควรรายงานค่า $R_t^{2(f_1)}, R_t^{2(f_2)}, R_t^{2(v)}, R_t^{2(m)}$ เพื่อให้ผู้อ่านสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การทำนายที่ตนเองต้องการได้
- จากนั้น ผู้วิจัยจึงเลือกสัมประสิทธิ์การทำนายที่ตนเองสนใจ มาอธิบายขนาดอิทธิพลของโมเดล
- ปัญหาของ R^2 ในการวิเคราะห์ถดถอย ยังคงอยู่เหมือนเดิม คือ
  - แม้ว่าประชากรจะไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ความสัมพันธ์ในกลุ่มตัวอย่างอาจเกิดขึ้นจากการสุ่ม ซึ่งทำให้ค่า R^2 มากกว่า 0 แม้ประชากรจะไม่สัมพันธ์กัน
  - ยังไม่มีสูตรปรับแก้ (Adjusted R^2) ในเวลานี้ แต่พอหลีกเลี่ยงการเฟ้อได้โดยไม่ใส่ตัวแปรอิสระมากเกินไป และเก็บจำนวนกลุ่มมากเพียงพอ

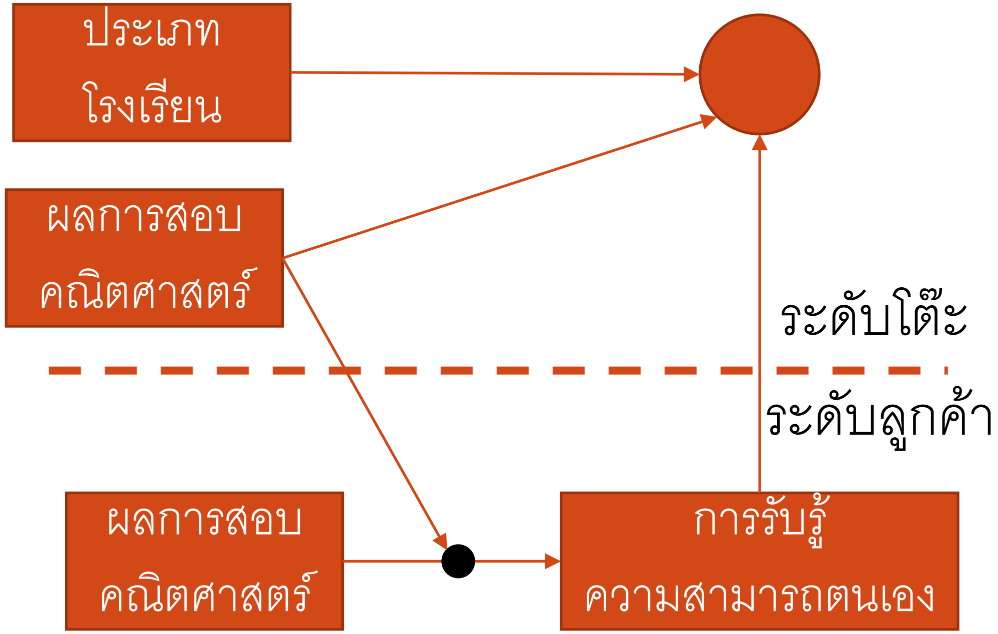
สัมประสิทธิ์การทำนาย

- `r2mlm` package ใน R (Shaw, Rights, Sterba, & Flake, 2020) สามารถใช้หาสัมประสิทธิ์การทำนายที่กล่าวมาข้างต้นได้เลย
- อย่าลืมว่า โมเดลที่จะหา R^2 ได้ด้วยวิธีที่กล่าวมาข้างต้น ต้องเป็นโมเดลที่ตัวแปรต้น มีการย้ายศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มเท่านั้น

สัมประสิทธิ์การทำนาย

ทำนายการรับรู้ความสามารถของตนเอง
ของนักเรียน ด้วยผลการสอบคณิตศาสตร์
และประเภทของโรงเรียน





เนื่องจาก r2mlm ไม่รองรับการใช้ I ()
จึงแปลงข้อมูลนอกฟังก์ชั่น

```
> dat4 <-read.table("lecture6ex1.csv", sep=",", header=TRUE)
> dat4$aveach <- ave(dat4$ach, dat4$schoolid)
> dat4$diffach <- dat4$ach - dat4$aveach
> dat4$aveach50 <- dat4$aveach - 50
>
> out4m1 <- lmer(efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private
+                 + diffach:aveach50
+                 + (1 + diffach|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:avea
   Data: dat4

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  8888.7   8939.0  -4435.3   8870.7     1982

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1594 -0.6500  0.0071  0.6654  3.2921

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 schoolid (Intercept) 1.53574  1.2392
          diffach     0.02968  0.1723   -0.22
 Residual             4.34903  2.0854
Number of obs: 1991, groups:  schoolid, 50

Fixed effects:
                  Estimate Std. Error t value
(Intercept)      35.602009   0.325448 109.394
diffach           0.061923   0.027110   2.284
aveach50          0.048671   0.021855   2.227
private          -0.181827   0.420004  -0.433
diffach:aveach50  0.009505   0.002548   3.730
```

```
> library(r2mlm)
> r2mlm(out4m1)
$Decompositions
                   total              within             between
fixed, within      0.171763691927118  0.206693800427878  NA
fixed, between     0.0263571201931131 NA                 0.155964397904184
slope variation    0.255308999040243  0.307228999930072  NA
mean variation     0.14263734615494   NA                 0.844035602095816
sigma2             0.403932842684585  0.48607719964205   NA
```

แบ่งความแปรปรวนออกเป็นส่วนต่างๆ

$$R_t^{2(f_1)} = .17$$
$$R_t^{2(f_2)} = .03$$
$$R_t^{2(v)} = .26$$
$$R_t^{2(m)} = .14$$

```
$R2s
    total              within             between
f1  0.171763691927118  0.206693800427878  NA
f2  0.0263571201931131 NA                 0.155964397904184
v   0.255308999040243  0.307228999930072  NA
m   0.14263734615494   NA                 0.844035602095816
f   0.198120812120231  NA                 NA
fv  0.453429811160474  0.51392280035795   NA
fvm 0.596067157315415  NA                 NA
```

ผลของ R^2 ที่ได้

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบแบบถาวรสามารถอธิบาย

ความแปรปรวนได้ 20%, $R_t^{2(f)} = .20$

ผลการสอบคณิตศาสตร์ส่งผลต่อการรับรู้ความสามารถของตนเอง โดยความชัน

แตกต่างกันระหว่างโรงเรียน อธิบายความแปรปรวนภายในโรงเรียนได้ 52%, $R_w^{2(fv)} = .51$

ผลการสอบคณิตศาสตร์เฉลี่ยระหว่างโรงเรียนและประเภทของโรงเรียน อธิบายความแปรปรวนของ

การรับรู้ความสามารถระดับโรงเรียนได้ 15%, $R_b^{2(f_2)} = .15$

สัมประสิทธิ์การทำนาย

- Snijders & Bosker (2012) หรืองานอื่น ได้ใช้วิธีการประมาณค่าโมเดลเปล่า (Null Model) เปรียบเทียบกับโมเดลเป้าหมาย (Target Model) แล้วดูว่าความแปรปรวนคงเหลือทั้งสองระดับลดลงมากเพียงใดในการคำนวณ R^2
- Rights & Sterba (2019) ได้แสดงให้ดูแล้วว่ากรอบนี่พวกเขาเสนอ กับแนวคิดของ Snijders & Bosker (2012) เหมือนกัน โดยแนวคิดของเขาครอบคลุมมากกว่าวิธีเดิม งานนี้จึงเสนอแค่วิธีใหม่

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ที่ผ่านมา เราพูดถึงโมเดลที่ตัวแปรอิสระทั้งหมด ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
- แต่ทว่า การวิเคราะห์บางประเภทยังคงใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าคงที่ หรือการไม่ย้ายศูนย์กลาง
- Rights และ Sterba (2021) ได้อธิบายการหาสัมประสิทธิ์การทำนาย ในการวิเคราะห์ข้อมูลระยะยาว ซึ่งพื้นฐานคณิตศาสตร์ คือ การหาสัมประสิทธิ์การทำนาย ในกรณีที่ตัวแปรต้นตัวใดตัวหนึ่ง ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม
  - นอกจากนี้ พวกเขายังได้พิสูจน์ว่า การย้ายศูนย์กลางด้วยค่าคงที่ ไม่มีผลต่อ R^2

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ยกตัวอย่าง การวิเคราะห์ที่ตัวแปรระดับที่หนึ่ง ไม่ย้ายศูนย์กลาง เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{11}W_jX_{ij} + u_{1j}X_{ij} + u_{0j} + e_{ij}$$

- ให้

$$X_{ij} = \left(X_{ij} - \bar{X}_{.j}\right) + \bar{X}_{.j}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ยกตัวอย่าง การวิเคราะห์ที่ตัวแปรระดับที่หนึ่ง ไม่ย้ายศูนย์กลาง เช่น

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}W_j + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- รวมสมการทั้งสองระดับแล้วจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}\left(X_{ij} - \bar{X}_{.j}\right) + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} \\ +\gamma_{11}W_j\left(X_{ij} - \bar{X}_{.j}\right) + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\ +u_{1j}\left(X_{ij} - \bar{X}_{.j}\right) + u_{1j}\bar{X}_{.j} + u_{0j} + e_{ij} \end{aligned}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 5 กลุ่มได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} = {} & \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \\
& + \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\
& + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{.j} + e_{ij}
\end{aligned}
$$

- แบ่งเป็นดังนี้
  - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร (Level-1 Predictors via Fixed Slopes)
    - ปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับอยู่ในกลุ่มนี้ เพราะความชันของตัวแปรต้นระดับที่ 1 สามารถกำหนดได้ด้วยค่าของตัวแปรต้นระดับที่ 2
  - ส่วนของตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร (Level-2 Predictors via Fixed Slopes)
  - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2 ที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรต้นระดับที่ 1
  - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 2 ที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรต้นระดับที่ 2
  - ส่วนของตัวแปรสุ่มระดับที่ 1

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สมการรวม สามารถจัดข้อมูลออกเป็น 5 กลุ่มได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} = {} & \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{11}W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \\
& + \gamma_{00} + \gamma_{01}W_j + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + \gamma_{11}W_j\bar{X}_{.j} \\
& + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{0j} + u_{1j}\bar{X}_{.j} + e_{ij}
\end{aligned}
$$

- สามารถเขียนรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$
Y_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ij} - \bar{X}_{.j} \\ W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ W_j \\ \bar{X}_{.j} \\ W_j\bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix} + [X_{ij} - \bar{X}_{.j}]'[u_{1j}] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} + e_{ij}
$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- ดังนั้น ความแปรปรวนของ Y_{ij} สามารถกระจายได้ดังนี้

$$Var(Y_{ij}) = Var\left(\begin{bmatrix} X_{ij} - \bar{X}_{.j} \\ W_j(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix}\right) + Var\left(\begin{bmatrix} 1 \\ W_j \\ \bar{X}_{.j} \\ W_j\bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{bmatrix}\right)$$

$$+Var\left([X_{ij} - \bar{X}_{.j}]'[u_{1j}]\right) + Var\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{.j} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix}\right) + Var(e_{ij})$$

- ความแปรปรวนของ Y_{ij} จึงเท่ากับความแปรปรวนของแต่ละส่วนโดยตรง เพราะแต่ละส่วนไม่สัมพันธ์กันตามทฤษฎี

$$Var(Y_{ij}) = \begin{bmatrix}\gamma_{10}\\ \gamma_{11}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}' Var\left(\begin{bmatrix} X_{1ij} - \bar{X}_{1.j} \\ \bar{X}_{1.j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \\ W_{1j}(X_{1ij} - \bar{X}_{1.j}) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_{10}\\ \gamma_{11}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{00}\\ \gamma_{01}\\ \gamma_{02}\end{bmatrix}' Var\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{X}_{1.j} \\ W_{1j} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_{00}\\ \gamma_{01}\\ \gamma_{02}\end{bmatrix}$$

$$+tr\left(Var([X_{ij} - \bar{X}_{.j}])Var([u_{1j}])\right) + tr\left(Var([\bar{X}_{.j}])Var([u_{1j}])\right) + \tau_{00} + \sigma^2$$

$$\boxed{Var(Y_{ij}) = f_1 + f_2 + v_1 + v_2 + m + e}$$

กล่าวคือ หากตัวแปรต้นระดับที่ 1 ตั้งศูนย์กลางที่ค่าเฉลี่ยกลุ่มทั้งหมดแล้ว ความแปรปรวนของตัวแปรตามจะแบ่งออกเป็น 6 ส่วน (Rights & Sterba, 2019) ดังนี้

1. f_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันถาวร
2. f_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันถาวร
3. v_1 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 1 ผ่านความชันสุ่ม
4. v_2 = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรต้นระดับที่ 2 ผ่านความชันสุ่ม
5. m = ความแปรปรวนที่อธิบายได้ด้วยค่าเฉลี่ยกลุ่มที่ปรับแล้วที่แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม
6. e = ความแปรปรวนของตัวแปรตามระดับที่ 1 ที่ไม่สามารถอธิบายได้

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- เพื่อให้เข้าใจความหมายของ v_2 ขอแสดงตัวอย่างนี้

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij}$$

ระดับที่ 1

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

ระดับที่ 2

- โมเดลข้างต้น จะเป็นการบังคับให้อิทธิพลภายในกลุ่ม และอิทธิพลระหว่างกลุ่มเท่ากัน ซึ่งจะรวมถึงทั้งอิทธิพลคงที่ (γ_{10}) และอิทธิพลสุ่ม (u_{1j})

$$Y_{ij} = \gamma_{10}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + u_{1j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + \gamma_{10}\bar{X}_{.j} + u_{1j}\bar{X}_{.j}$$
$$+\gamma_{00} + u_{0j} + e_{ij}$$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

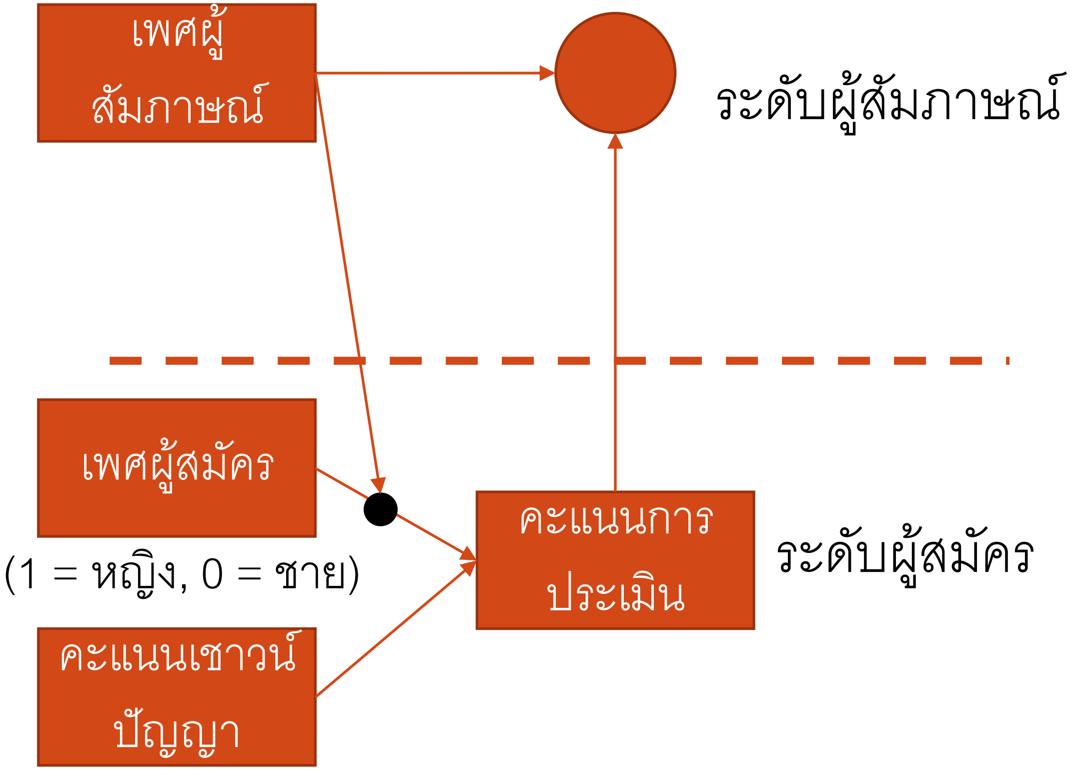
- กล่าวคือ ค่าของสัมประสิทธิ์ถดถอยของ $\bar{X}_{.j}$ แตกต่างกันระหว่างกลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 คือ $\gamma_{10} + u_{11}$ กลุ่มที่ 2 คือ $\gamma_{10} + u_{12}$ เป็นต้น
- v_2 จึงหมายความว่า ที่ให้สัมประสิทธิ์ถดถอยของ $\bar{X}_{.j}$ แตกต่างกันระหว่างกลุ่มนั้น อธิบายความแปรปรวนของตัวแปรตามได้มากน้อยเพียงใด
- นักวิเคราะห์มักจะเข้าใจการถดถอยแบบปกติ ที่ $\bar{X}_{.j}$ มีสัมประสิทธิ์ทำนายเหมือนกันทุกกลุ่มมากกว่า และ v_2 แปลความหมายเชิงปฏิบัติ ดังนั้นถ้าเป็นไปได้ ใช้การย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม จะทำให้การแปลความหมายตรงไปตรงมามากกว่า

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- สามารถนำ v_2 ไปรวมกับการหา R^2 ที่อธิบายไปข้างต้นได้ เช่น
  - $b = f_2 + v_2 + m$
  - $v = v_1 + v_2$
  - $R_t^{2(f)} = \frac{f_1+f_2}{f_1+f_2+v_1+v_2+m+e}$
  - $R_t^{2(fvm)} = \frac{f_1+f_2+v_1+v_2+m}{f_1+f_2+v_1+v_2+m+e}$

โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

ทดสอบอคติของผู้สัมภาษณ์ ว่าผู้สัมภาษณ์
เพศเดียวกัน จะมีอคติในการประเมิน
เพศเดียวกันสูงขึ้นหรือไม่



โมเดลที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม

- คำสั่งที่ใช้หาสัมประสิทธิ์การทำนายกรณีที่ไม่ได้ย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม คือ `r2mlm_long_manual` ใน `r2mlm`
- ฟังก์ชั่นนี้ ไม่ได้รองรับการใช้สูตรคำนวณในคำสั่ง `lmer` เช่น `I(), :,` หรือ `*` ดังนั้นจึงต้องคำนวณข้อมูลเหล่านี้นอกฟังก์ชั่น

```
> library(lme4)
> library(r2mlm)
> dat5 <-read.table("lecture4ex2.csv", sep=",", header=TRUE)
> dat5$iqc <- dat5$iq - 100
> dat5$int <- dat5$eesex * dat5$ersex
> out5 <- lmer(score ~ 1 + eesex + iqc + ersex + int
+                 + (1 + eesex|erid), data=dat5, REML=FALSE)
> summary(out5)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: score ~ 1 + eesex + iqc + ersex + int + (1 + eesex | erid)
   Data: dat5

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 61641.0  61705.9 -30811.5  61623.0     9991

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.7413 -0.6367 -0.0048  0.6410  3.4320

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 erid     (Intercept) 20.1152  4.4850
          eesex        0.7979  0.8933   0.12
 Residual             21.7645  4.6652
Number of obs: 10000, groups:  erid, 1000

Fixed effects:
             Estimate Std. Error t value
(Intercept) 75.538700   0.221217 341.469
eesex       -0.413234   0.137868  -2.997
iqc          0.029418   0.003299   8.918
ersex        0.009887   0.312847   0.032
int          1.073648   0.194981   5.506
```

คำนวนปฏิสัมพันธ์ และย้ายศูนย์กลางนอกฟังก์ชั่น

```
> sumout5 <- summary(out5)
> r2mlm::r2mlm_long_manual(data=dat5,
+                           covs=c("eesex", "iqc", "ersex", "int"),
+                           random_covs=c("eesex"),
+                           gammas=coef(sumout5)[-1, "Estimate"],
+                           clusterID="erid",
+                           Tau=as.matrix(Matrix::bdiag(VarCorr(out5))),
+                           sigma2=getME(out5, "sigma")^2)
```

$$R_t^{2(f_1)} = .006$$
$$R_t^{2(f_2)} = .002$$
$$R_t^{2(v_1)} = .005$$
$$R_t^{2(v_2)} = .000$$
$$R_t^{2(m)} = .483$$

แบ่งความแปรปรวนออกเป็นส่วนต่างๆ

$Decompositions

	total	within	between
fixed slopes (within)	0.00582204913193309	0.0113016365460723	NA
fixed slopes (between)	0.0021708245650446	NA	0.00447732071508045
slope variation (within)	0.00462639247317185	0.00898065355795313	NA
slope variation (between)	0	NA	0
intercept variation (between)	0.482678196353395	NA	0.99552267928492
residual (within)	0.504702537476455	0.979717709895975	NA

$R2s

	total	within	between
f1	0.00582204913193309	0.0113016365460723	NA
f2	0.0021708245650446	NA	0.00447732071508045
v1	0.00462639247317185	0.00898065355795313	NA
v2	0	NA	0
m	0.482678196353395	NA	0.99552267928492
f	0.00799287369697777	NA	NA
fv	0.0126192661701495	0.0202822901040254	0.00447732071508045
fvm	0.495297462523545	NA	NA

ผลของ R^2 ที่ได้

ตัวแปรต้นทั้งหมดโดยกำหนดให้ความชันแบบแบบถาวรสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ 0.8%, $R_t^{2(f)} = .008$

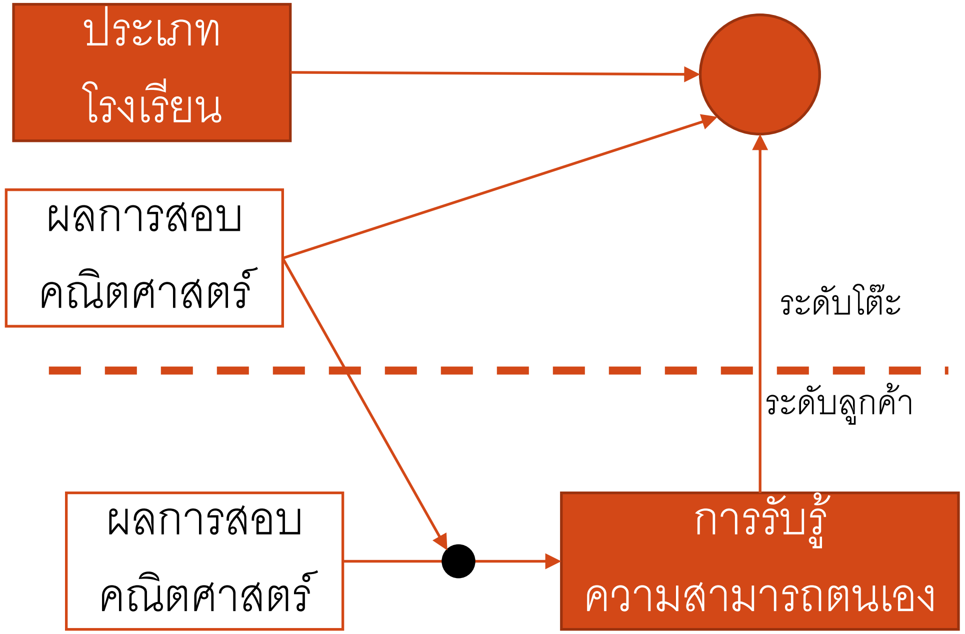
สาเหตุที่ v_2 มีค่าเท่ากับ 0 เพราะผู้สัมภาษณ์แต่ละคน สัมภาษณ์ผู้สมัครเพศชายและหญิงอย่างละ 5 คนเท่ากัน จึงไม่มีอิทธิพลของเพศผู้สมัครเฉลี่ยระหว่างกลุ่ม

ความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์การทำนาย

- เราสามารถเปรียบเทียบโมเดล 2 โมเดล ว่าค่าที่แตกต่างระหว่าง 2 โมเดล สามารถอธิบายความแปรปรวนของตัวแปรตามได้เพิ่มขึ้นเพียงใด
- ค่า ΔR^2 ที่ได้จากการวิเคราะห์พหุระดับนั้น จะไม่ได้ออกมาเพียงค่าเดียว และการใส่ค่าที่แตกต่างกันส่งผลต่อ R^2 แต่ละส่วนแตกต่างกัน เช่น
  - การเพิ่มตัวแปรระดับที่ 1 แบบย้ายศูนย์กลางไปที่ค่าเฉลี่ยกลุ่ม ควรจะเพิ่ม f_1 และ v แต่ลด e
  - การเพิ่มตัวแปรระดับที่ 2 ควรจะเพิ่ม f_2 และลด m
  - การเพิ่มความชันแบบสุ่ม ควรจะเพิ่ม v และลด e
  - การเพิ่มปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับ ควรเพิ่ม f_1 ลด v และ e

ความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์การทำนาย

ต้องการตรวจสอบว่า การเพิ่มผลการสอบคณิตศาสตร์ สามารถอธิบายความแปรปรวนได้เพิ่มเติมมากกว่าประเภทโรงเรียนเท่าใด



ทำนายด้วยประเภทโรงเรียนอย่างเดียว

```
> out4m2 <- lmer(efficacy ~ 1 + private + (1|schoolid), data=dat4,
> summary(out4m2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + private + (1 | schoolid)
   Data: dat4

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 10096.3  10118.7  -5044.2  10088.3     1987

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.8152 -0.6287  0.0196  0.6398  4.2909

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 schoolid (Intercept) 1.627    1.276
 Residual             8.812    2.968
Number of obs: 1991, groups:  schoolid, 50

Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)  36.0042     0.2725 132.148
private      -0.5694     0.3853  -1.478
```

เพิ่มผลการเรียนคณิตศาสตร์

```
> out4m1 <- lmer(efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private
+                  + diffach:aveach50
+                  + (1 + diffach|schoolid), data=dat4, REML=FALSE)
> summary(out4m1)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:avea
   Data: dat4

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  8888.7   8939.0  -4435.3   8870.7     1982

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.1594 -0.6500  0.0071  0.6654  3.2921

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 schoolid (Intercept) 1.53574  1.2392
          diffach     0.02968  0.1723   -0.22
 Residual             4.34903  2.0854
Number of obs: 1991, groups:  schoolid, 50

Fixed effects:
                  Estimate Std. Error t value
(Intercept)      35.602009   0.325448 109.394
diffach           0.061923   0.027110   2.284
aveach50          0.048671   0.021855   2.227
private          -0.181827   0.420004  -0.433
diffach:aveach50  0.009505   0.002548   3.730
```

```
> anova(out4m2, out4m1)
Data: dat4
Models:
out4m2: efficacy ~ 1 + private + (1 | schoolid)
out4m1: efficacy ~ 1 + diffach + aveach50 + private + diffach:aveach50 + (1 + diffach | schoolid)
       npar     AIC   BIC  logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
out4m2    4 10096.3 10119 -5044.2  10088.3
out4m1    9  8888.7  8939 -4435.3   8870.7 1217.6  5  < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

สองโมเดลแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

คำสั่งใช้ในการเปรียบเทียบ R^2 ระหว่าง 2 โมเดล

```
> r2mlm_comp(out4m2, out4m1)
$`Model A R2s`
    total              within between
f1  0                  0      NA
f2  0.00770865701454532 NA    0.0474712819765213
v   0                  0      NA
m   0.154677035841989  NA     0.952528718023479
f   0.00770865701454532 NA    NA
fv  0.00770865701454532 0     NA
fvm 0.162385692856534  NA     NA

$`Model B R2s`
    total              within            between
f1  0.171763691927118  0.206693800427878 NA
f2  0.0263571201931131 NA                0.155964397904184
v   0.255308999040243  0.307228999930072 NA
m   0.14263734615494   NA                0.844035602095816
f   0.19812081212023 1 NA                NA
fv  0.453429811160474  0.51392280035795  NA
fvm 0.596067157315415  NA                NA

$`R2 differences, Model B - Model A`
         total    within    between
f1   0.17176369 0.2066938        NA
f2   0.01864846        NA 0.1084931
v    0.25530900 0.3072290        NA
m   -0.01203969        NA -0.1084931
f    0.19041216        NA        NA
fv   0.44572115 0.5139228        NA
fvm  0.43368146        NA        NA
```

R_t^2	1	2	ΔR^2
f_1	0	.17	.17
f_2	.01	.03	.02
v	0	.26	.26
m	.15	.14	-.01
f	.01	.20	.19

ผลการเรียนคณิตศาสตร์สามารถอธิบายความแปรปรวนทั้งสองระดับได้เพิ่มขึ้น 19%, $\Delta R_t^{2(f)} = .19$

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ในการวิเคราะห์ถดถอย สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน คือ หากตัวแปรอิสระเพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแล้ว ตัวแปรตามเปลี่ยนแปลงไปกี่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เมื่อควบคุมค่าอื่นให้คงที่
- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในที่นี้ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรนั้นตามธรรมชาติ เช่น คะแนนเชาวน์ปัญญา ควรใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากความแปรปรวนทั้งหมด (Total variance)
- ดังนั้น ในการวิเคราะห์พหุระดับ จึงไม่ต้องทำสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานแต่ละระดับ เพราะเราต้องการผลการวิเคราะห์ที่ทราบว่า หากตัวแปรนี้เปลี่ยนแปลงไป 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามธรรมชาติ จะส่งผลต่อตัวแปรตามอย่างไร

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- วิธีการที่ง่ายที่สุด คือ การแปลงค่าตัวแปรให้เป็นคะแนนมาตรฐาน ก่อนนำไปวิเคราะห์พหุระดับ
- ค่าสัมประสิทธิ์ถดถอยที่ได้ จะเป็นสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน แต่ไม่ควรแปรความหมายระดับนัยสำคัญของโมเดลนี้ เพราะไม่ได้คำนึงถึงความผิดพลาดสุ่มของค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ใช้หาคะแนนมาตรฐาน

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

```
> dat1$zconsume <- scale(dat1$consume)
> dat1$zlength <- scale(dat1$length)
> dat1$avezlength <- ave(dat1$zlength, dat1$groupid)
> dat1$diffzlength <- dat1$zlength - dat1$avezlength
>
> volume <- dat1[!duplicated(dat1$groupid), "volume"]
> mvolume <- mean(volume)
> sdvolume <- sd(volume)
> dat1$zvolume <- (dat1$volume - mvolume) / sd(volume)
```

แปลงตัวแปรระดับที่ 1 ให้เป็นคะแนนมาตรฐาน

หาค่าเฉลี่ยกลุ่ม และทำ

Group mean centering

สร้างตัวแปรระดับที่ 2 ใหม่

เพราะค่าของตัวแปรแต่ละกลุ่ม

จะมีค่าซ้ำกัน ควรลดมาให้

1 กลุ่มมีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

หา *M* และ *SD* ของปริมาตร

เปลี่ยนให้เป็นคะแนนมาตรฐานด้วย *M* และ *SD* ที่คำนวณได้

วิเคราะห์พหุระดับปกติ

```
> out1z23 <- lmer(zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume
+                 + diffzlength:zvolume + (1 + diffzlength|groupid),
+                 data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1z23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume + diffzlen
    (1 + diffzlength | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
   963.2   1005.5   -472.6    945.2      802

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.14847 -0.65743  0.02342  0.65482  2.93474

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 groupid  (Intercept) 0.319744 0.56546
          diffzlength 0.006453 0.08033  0.58
 Residual             0.126302 0.35539
Number of obs: 811, group

Fixed effects:
                     Estimate Std. Error t value
(Intercept)         -0.003563   0.058226  -0.061
diffzlength          0.626757   0.016704  37.521
avezlength           0.797198   0.130463   6.111
zvolume              0.232776   0.062356   3.733
diffzlength:zvolume  0.038541   0.016111   2.392
```

สังเกตว่า γ_{00} มีค่าใกล้ 0

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

ตัวแปรอิสระ	*b*	*SE*	*t*	β
จุดตัด	18.65	2.39	7.80	
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	7.28	0.67	10.94	.627
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	11.00	1.80	6.11	.797
ปริมาตรตู้ปลา (B)	5.85	1.57	3.73	.233
A x B	1.93	0.81	2.39	.039

ถ้าปลาภายในตู้ปลา มีความยาวเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .627 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ถ้าตู้ปลามีความยาวเฉลี่ยของปลาเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความยาวปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .797 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ถ้าตู้ปลามีปริมาตรเพิ่มขึ้นเทียบเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของปริมาตรตู้ปลาทั้งหมดแล้ว การกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้นเทียบเท่า .233 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตัวแปรอิสระ	*b*	*SE*	*t*	β
จุดตัด	18.65	2.39	7.80	
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	7.28	0.67	10.94	.627
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	11.00	1.80	6.11	.797
ปริมาตรตู้ปลา (B)	5.85	1.57	3.73	.233
A x B	1.93	0.81	2.39	.039

ถ้าปริมาตรเพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน อิทธิพลมาตรฐานของความยาวปลาภายในตู้ปลาที่มีต่อการกินอาหารปลาจะเพิ่มขึ้น .039

อย่างไรก็ตาม การเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยความยาวของปลาแต่ละตู้ปลา และปริมาตรตู้ปลานั้น ก็ไม่ได้เกิดจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเดียวกัน

- ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา คำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานรวม
- ปริมาตรตู้ปลา คำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่างตู้ปลา.
- ดังนั้น ค่า β ของทั้งสองตัวแปร ก็ยังไม่ควรใช้เปรียบเทียบกันอยู่ดี

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- นอกจากเรื่องส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ตรงกันแล้ว ตัวแปรระดับที่ 1 อาจมีความชันสุ่ม ซึ่งสะท้อนออกมาโดยสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานได้ยาก
- วิธีการที่ดีกว่า คือ การคำนวณ $\Delta R_t^{2(f)}, \Delta R_t^{2(fvm)}$ ระหว่างโมเดลที่มีและไม่มีตัวแปรที่ต้องการหาการอธิบายความแปรปรวน

จากโมเดลรวม

consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume
+ difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid

1. ตัด difflengthx ออกจากโมเดล

consume ~ 1 ~~+ difflengthx~~ + avelengthx + volume
~~+ difflengthx:volume~~ + (1 ~~+ difflengthx~~|groupid

2. ตัด avelengthx ออกจากโมเดล

consume ~ 1 + difflengthx ~~+ avelengthx~~ + volume
+ difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid

3. ตัด volume ออกจากโมเดล

consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx ~~+ volume~~
~~+ difflengthx:volume~~ + (1 + difflengthx|groupid

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ได้ผลดังนี้

ตัวแปร	$R_t^{2(f)}$	$R_t^{2(fvm)}$	$\Delta R_t^{2(f)}$	$\Delta R_t^{2(fvm)}$
โมเดลรวม	.557	.876		
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	.229	.489	.328	.387
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	.458	.880	.099	-.004
ปริมาตรตู้ปลา (B)	.494	.873	.063	.003

ค่าเบี่ยงเบนความยาวปลา มีอิทธิพลทั้งทางตรงและปฏิสัมพันธ์ระหว่างระดับรวม 33%

หากรวมอิทธิพลความชันสุ่มของค่าเบี่ยงเบนความยาวปลาเพิ่มเติม จะมีอิทธิพล 39%

สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- ได้ผลดังนี้

ตัวแปร	$R_t^{2(f)}$	$R_t^{2(fvm)}$	$\Delta R_t^{2(f)}$	$\Delta R_t^{2(fvm)}$
โมเดลรวม	.557	.876		
ค่าเบี่ยงเบนของความยาวปลาภายในตู้ปลา (A)	.229	.489	.328	.387
ค่าเฉลี่ยความยาวปลาของแต่ละตู้ปลา	.458	.880	.099	-.004
ปริมาตรตู้ปลา (B)	.494	.873	.063	.003

ในระดับตู้ปลา ความยาวเฉลี่ยของปลาจะมีอิทธิพลสูงกว่าปริมาตรของตู้ปลา

ไม่แปลกที่ค่าใกล้ 0 เพราะเหมือนการย้ายความแปรปรวนไปมาระหว่าง f_2 และ m

ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่าค่าความเป็นไปได้ ของโมเดลปกติและโมเดลมาตรฐานไม่ตรงกัน

```
> out1b23 <- lmer(consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume
+                 + difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid),
+                 data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1b23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume + diffleng
    (1 + difflengthx | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  4100.1   4142.4  -2041.1   4082.1      802
```

```
> out1z23 <- lmer(zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume
+                 + diffzlength:zvolume + (1 + diffzlength|groupid),
+                 data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1z23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: zconsume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume + diffzler
    (1 + diffzlength | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
   963.2   1005.5   -472.6    945.2      802
```

ที่ไม่เท่ากัน เพราะตัวแปรตามอยู่คนละสเกลกัน ถ้าตัวแปรตามอยู่สเกลเดียวกันจะเปรียบเทียบกันได้

ตัวแปรตามปกติ ตัวแปรอิสระมาตรฐาน

```
> out1zb23 <- lmer(consume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume
+                 + diffzlength:zvolume + (1 + diffzlength|groupid),
+                 data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1zb23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: consume ~ 1 + diffzlength + avezlength + zvolume + diffzleng
    (1 + diffzlength | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  4100.1   4142.4  -2041.1   4082.1      802
```

ตัวแปรตามมาตรฐาน ตัวแปรอิสระปกติ

```
> out1bz23 <- lmer(zconsume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume
+                 + difflengthx:volume + (1 + difflengthx|groupid),
+                 data=dat1, REML=FALSE)
> summary(out1bz23)
Linear mixed model fit by maximum likelihood  ['lmerMod']
Formula: zconsume ~ 1 + difflengthx + avelengthx + volume + diffleng
    (1 + difflengthx | groupid)
   Data: dat1

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
   963.2   1005.5   -472.6    945.2      802
```

สังเกตว่าค่าเท่ากับด้านบน แสดงว่าการทำให้เป็นคะแนนมาตรฐานไม่ได้เปลี่ยนแปลงเนื้อในของโมเดล

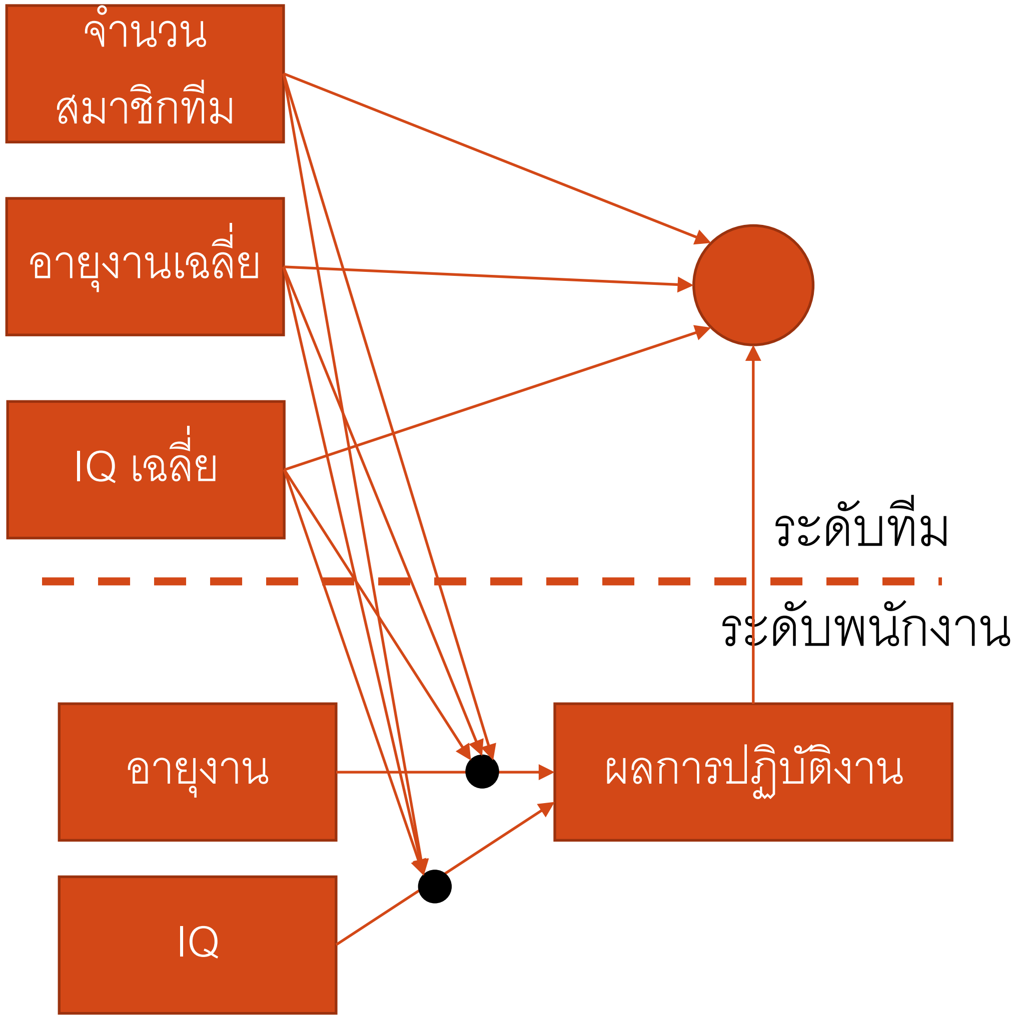
สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน

- การทำคะแนนสัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐาน ควรใช้ในการเปรียบเทียบภายในโมเดลเดียวกัน ระหว่างตัวแปรระดับเดียวกัน ที่หารด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประเภทเดียวกันเท่านั้น
- เช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์ถดถอย สัมประสิทธิ์ถดถอยมาตรฐานไม่ควรใช้เปรียบเทียบระหว่างโมเดล
- หากต้องการขนาดอิทธิพล ควรใช้ ΔR_t^2 ในการรายงานผล

คาบต่อไป

- การสร้างโมเดล

แบบฝึกหัด



จงแปลความหมายจากข้อมูลต่อไปนี้

Source	R_t^2
f_1	.15
f_2	.18
v	.10
m	.22
e	.35